

С. Д. Л Е Й Т Е С

УСТОЙЧИВОСТЬ
СЖАТЫХ
СТАЛЬНЫХ
СТЕРЖНЕЙ

М О С К В А
1 9 5 4

С. Д. ЛЕЙТЕС

УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТАЛЬНЫХ СТЕРЖНЕЙ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛИТЕРАТУРЫ ПО СТРОИТЕЛЬСТВУ И АРХИТЕКТУРЕ
Москва—1954

Научный редактор — канд. техн. наук И. К. Снитко

Книга содержит систематическое изложение теории устойчивости сжатых и сжато-изогнутых стальных стержней, а также плоских систем, из них образованных. Детально исследована упруго-пластическая работа стали. Большое внимание уделено практическим методам расчета сжатых и сжато-изогнутых стальных стержней. Изложены общие методы исследования устойчивости статически неопределимых систем и дано решение значительного количества задач, доведенное до численного результата в форме, допускающей непосредственное применение в практических расчетах. Большое число таблиц и графиков позволяет использовать книгу в качестве справочника при проектировании стальных строительных конструкций.

Книга рассчитана на инженеров-проектировщиков и научных работников.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вопросы устойчивости сжатых и сжато-изогнутых стержней занимают видное место в теории сооружений и имеют большое практическое значение при проектировании стальных строительных конструкций. Трудами отечественных ученых создана научно обоснованная и практически целесообразная методика расчета таких стержней.

Настоящая работа представляет собой попытку систематического изложения теории устойчивости сжатых и сжато-изогнутых стальных стержней в инженерных сооружениях. Отличаясь от предшествующих работ на эту же тему по подбору, расположению и трактовке материала, настоящая книга содержит также некоторые оригинальные исследования автора.

Автор преследует следующие цели:

1) дать популярное, но в то же время научно строгое изложение теории вопроса;

2) возможно более отчетливо осветить физический смысл явлений, избегая формально-математической интерпретации;

3) соединить отдельные частные вопросы теории в единую логическую схему, связывающую теорию с практическими методами расчета;

4) представить с достаточной полнотой фактический материал, с тем чтобы книга в целом могла служить справочником.

Сложность поставленных задач и обилие материала предопределили значительное ограничение круга рассматриваемых вопросов устойчивости. В книге рассматривается устойчивость сжатых и сжато-изогнутых стержней, а также плоских стержневых систем в следующих предположениях:

1) стержни являются прямолинейными и имеют постоянное по всей длине сечение;

2) сжимающая сила постоянна по всей длине стержня;

3) потеря устойчивости происходит в плоскости одной из главных осей поперечного сечения стержня; для сжато-изогнутого стержня эта плоскость совпадает с плоскостью действия

поперечной нагрузки; для системы стержней эта плоскость совпадает с плоскостью, в которой расположены стержни.

Особенностью книги является то обстоятельство, что все вопросы рассматриваются с точки зрения инженера-проектировщика стальных конструкций.

Уделено значительное внимание технике вычислений. В книге не только устанавливаются аналитические зависимости, но и показывается, как из этих зависимостей может быть получен численный результат.

Вводная глава содержит краткий исторический очерк развития теории вопроса и имеет целью осветить процесс формирования современных научных воззрений, в котором ведущая роль принадлежит отечественной науке.

В первых двух главах рассматриваются сжатые и сжато-изогнутые стержни в предположении их упругой работы. Основные закономерности имеющих место явлений иллюстрируются при помощи модели. Показывается применение теорем о свойствах потенциальной энергии системы. Рассматриваются и сравниваются между собой различные методы определения критической силы.

Третья глава содержит изложение теории устойчивости сжатых и сжато-изогнутых стержней на основе представления об идеальном упруго-пластическом материале. Наряду с точными методами рассматриваются также и приближенные методы исследования, применимые при любой форме поперечного сечения стержня.

В четвертой главе излагаются методы исследования устойчивости сжатых и сжато-изогнутых стержней, основанные на фактической зависимости между удлинением и напряжением для стали.

Содержание пятой главы составляют практические методы расчета сжатых и сжато-изогнутых стальных стержней. Дается обоснование расчетной методики с точки зрения общей задачи расчета стальных конструкций, анализируются и оцениваются различные расчетные формулы.

Шестая глава посвящена конечным деформациям сжатых и сжато-изогнутых стержней. Упомянутая выше модель позволяет осветить особенности упругой работы таких стержней при конечных деформациях. В этой главе приведена также классификация различных явлений потери устойчивости.

В седьмой главе рассматриваются общие методы исследования устойчивости плоских стержневых систем, являющиеся обобщением известных методов строительной механики. В частности, рассматривается обобщение метода деформаций в канонической трактовке, предложенное автором в 1937 г.

Восьмая глава содержит решение ряда задач устойчивости плоских стержневых систем, доведенное до численного результата, в виде графика, таблицы или приближенной формулы.

При решении используются методы, изложенные в главе седьмой. Ряд задач решен при помощи теории конечных разностей. Приведенные в этой главе материалы могут быть использованы в практических расчетах для непосредственного определения свободной длины стержней, входящих в состав плоской системы. Содержащая минимум текста, глава эта представляет собой справочное пособие для инженера-проектировщика.

Книга не предполагает у читателя предварительного знакомства с рассматриваемым вопросом. Она предназначена для читателя, обладающего познаниями в области математики и теории сооружений в объеме, предусмотренном программами строительных высших учебных заведений.

Автор выражает благодарность проф. д-ру техн. наук А. Р. Ржаницыну за ряд ценных указаний.

ВВЕДЕНИЕ

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ И СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Теория устойчивости сжатых стержней ведет свое начало с 1744 г., когда знаменитый Леонард Эйлер, член Российской академии наук, решил задачу о равновесии прямолинейного упругого стержня, нагруженного продольной сжимающей силой. В своем труде¹ Эйлер нашел, что при малых значениях сжимающей силы стержень останется прямолинейным; если сжимающая сила превзойдет некоторое критическое значение, «то колонна не сможет сопротивляться изгибу» (слова Эйлера). Найденная Эйлером величина *критической*, или *эйлеровой*, силы пропорциональна жесткости стержня при изгибе и обратно пропорциональна квадрату его длины.

Резкое падение сопротивляемости сжатого стержня изгибу при достижении сжимающей силой критического значения называется *потерей устойчивости*.

В инженерной практике того времени господствовали конструктивные формы, при которых явление потери устойчивости не могло иметь места. Поэтому в течение целого столетия выводы Эйлера рассматривались только как математический парадокс, не имеющий практического значения.

Прогресс строительной техники в XIX в. потребовал от инженеров умения рассчитывать длинные сжатые стержни. Анализ причин происшедших в то время катастроф с железнодорожными мостами показал, что в подавляющем большинстве случаев разрушение конструкций было вызвано выходом из работы сжатых стержней вследствие потери устойчивости. Теория Эйлера начинает находить свое применение в инженерной практике; будучи обобщена на случай критических напряжений, превышающих предел пропорциональности, теория эта стано-

¹ Leonhard Euler, Methodus inveniendi lineas curvas, Additamentum I, De curvis elasticis, 1744. Русский перевод: Л. Эйлер, Метод нахождения кривых линий, Приложение I, „Об упругих кривых“, Гостехиздат. 1934. Цитаты даны по этому изданию.

вится надежной базой расчета сжатых стержней в строительных конструкциях.

Трудная и многообразная проблема устойчивости привлекает внимание как вследствие своей актуальности, так и вследствие сложности явления, при котором количественное увеличение нагрузки приводит к изменению качества равновесия между внутренними и внешними силами.

Теория устойчивости сжатых стержней в истоках своих имеет математическую физику, а конечной целью ставит задачу создания инженерных методов расчета. Здесь в равной мере используются методы математического анализа, данные лабораторных экспериментов и практический инженерный опыт.

Создание теории, связывающей воедино физические основы явления, аналитическое его исследование и практические инженерные методы расчета, достигнуто в основном трудами советских ученых и инженеров. Решающей предпосылкой для этого явился как грандиозный размах строительства в Советском Союзе, так и широкая постановка научно-исследовательских работ.

Элементарное исследование устойчивости центрально сжатого упругого стержня основывается на гипотезе плоских сечений и на предположении о малости деформаций изгиба при криволинейной форме равновесия. Пренебрегая влиянием работы продольных и поперечных сил, получаем линейное дифференциальное уравнение, лежащее в основе технической теории изгиба. Для случая центрально сжатого стержня это уравнение будет однородным. При указанных предпосылках задача упругой устойчивости сводится к хорошо разработанным задачам математической физики о собственных значениях и собственных функциях.

Для линейных однородных уравнений (алгебраических, дифференциальных или интегральных), выражающих условия равновесия при отсутствии возмущающих факторов, всегда имеет место решение, при котором искомая функция тождественно равна нулю на всем рассматриваемом интервале. Такое решение называется *тривиальным*.

Существование других, отличных от тривиального, решений линейных однородных уравнений возможно только лишь в том случае, если параметры этих уравнений имеют некоторые значения, называемые *собственными значениями* или *характеристическими числами*. Примерами собственных значений являются величина критической сжимающей силы или же собственная частота малых колебаний упругой системы.

Для центрально сжатого упругого стержня существует бесчисленное множество значений критической силы. Наименьшее из этих значений называется первой критической силой. Говоря о критической силе, обычно имеют в виду именно это первое, или *эйлерово*, значение.

Переход к криволинейной форме равновесия при критическом значении сжимающей силы называется явлением потери устойчивости. Форма упругой кривой определяется при этом собственной функцией, находимой с точностью до произвольного числового множителя, величина которого остается неопределенной. Таким образом, при критическом (эйлеровом) значении сжимающей силы наряду с прямолинейной формой равновесия возможно существование бесконечного числа криволинейных форм равновесия, отличающихся друг от друга величиной упомянутого выше множителя.

Если задача равновесия может быть приведена к системе линейных однородных алгебраических уравнений, то вся совокупность (или, как говорят, весь *спектр*) собственных значений находится из условия равенства нулю главного определителя (детерминанта) системы.

В тех случаях, когда дифференциальные уравнения, выражающие условия равновесия или движения, не могут быть непосредственно проинтегрированы, особое значение приобретает качественное исследование этих уравнений, позволяющее сделать вывод об устойчивости равновесия или движения. Этой задачей занимался в конце прошлого столетия Пуанкаре, однако наибольшего успеха достиг выдающийся русский математик А. М. Ляпунов. В своей монографии¹ Ляпунов дал математически строгое решение задачи для случая, когда движение определяется системой линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Классическое исследование Ляпунова послужило богатым источником идей для дальнейшего развития этой теории.

Общие свойства собственных значений и собственных функций могут быть непосредственно выведены из свойств матрицы коэффициентов влияния (для системы с конечным числом степеней свободы) или же из свойств ядра интегрального уравнения (для континуума). Обоснованию этого положения посвящена работа Ф. Р. Гантмахера и М. Г. Крейна², где все вопросы формулируются в терминах теории колебаний. Не представляет, однако, затруднений распространить эти положения на область теории упругой устойчивости.

Со времени попыток Брайана³ и Саусвела⁴ установить общие критерии потери упругой устойчивости разработка этих вопросов существенно продвинулась вперед. Были выяснены условия, при которых теряет справедливость теорема Кирхгофа об однозначности решений задач теории упругости. Сформу-

¹ А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, 1892. О значении трудов Ляпунова см. Н. Д. Монсеев, Очерки развития теории устойчивости, Гостехиздат, 1949.

² Ф. Р. Гантмахер и М. Г. Крейн, Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, Гостехиздат, 1950.

³ G. H. Bryan, Proc. Cambridge Phil Soc., 1886/89.

⁴ R. Southwell, Phil. Trans. Roy. Soc., 1913.

лированные в трудах Ф. С. Ясинского¹, Б. Г. Галеркина² и И. Г. Бубнова³ аналитические критерии потери устойчивости упругих систем осветили принципиальные особенности явления и послужили основой для создания практических методов решения задач устойчивости.

В этой области важное значение имеют общие теоремы об устойчивости упругих систем, установленные П. Ф. Папковичем. Итоги разработки П. Ф. Папковичем этих вопросов изложены во второй части его труда⁴, удостоенного Сталинской премии. Особое внимание П. Ф. Папкович уделил практически важному вопросу, когда упругая система нагружена сочетанием различных силовых факторов. Основываясь исключительно на общих свойствах упругих систем, П. Ф. Папкович установил ряд теорем о свойствах пограничной поверхности и о влиянии различных факторов на устойчивость системы.

Учение о свойствах потенциальной энергии упругих систем приводит к энергетическому критерию устойчивости. В состоянии устойчивого равновесия функция, выражающая потенциальную энергию системы, имеет наименьшее значение по сравнению с положениями, несколько отклоненными от этого равновесного состояния. Экстремальный принцип позволяет свести задачу устойчивости к основной задаче вариационного исчисления, именно к задаче о нахождении вида подинтегральной функции, реализующей экстремум определенного интеграла (функционала). Таким путем дифференциальное уравнение упругой устойчивости может быть выведено непосредственно из выражения для потенциальной энергии системы.

Экстремальные свойства потенциальной энергии позволяют построить ряд приближенных методов решения задач о собственных значениях. К этим методам относится, например, метод Ритца⁵, основанный на приближенном представлении (аппроксимировании) искомой функции, выражающей упругую кривую, при помощи конечного числа известных функций, каждая из которых удовлетворяет граничным условиям задачи.

Замена искомой функции в выражении для потенциальной энергии системы суммой аппроксимирующих функций, взятых с некоторыми неизвестными пока коэффициентами, приводит вариационную задачу к гораздо более простой задаче разыскания экстремума функции конечного числа переменных. Отсюда возникает возможность определения величины критической силы и формы изгиба при потере устойчивости. Точность решения

¹ Ф. С. Ясинский, О сопротивлении продольному изгибу, 1894.

² Б. Г. Галеркин, Теория продольного изгиба, „Известия Петербургского политехнического института“, 1909.

³ И. Г. Бубнов, Строительная механика корабля, т. I, 1912.

⁴ П. Ф. Папкович, Строительная механика корабля, ч. II, Судпромгиз, 1941.

⁵ W. Ritz, Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der Mathematischen Physik, „Journal für Mathematik“, т. 135, 1908.

зависит от удачного выбора аппроксимирующих функций, а также и от числа их.

Теоретическое обоснование метода аппроксимирования проведено в трудах советских математиков, в особенности Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова¹.

Методы приближенного решения задач устойчивости, основанные на использовании выражений для потенциальной энергии системы, часто объединяются общим названием энергетических. Разработка энергетических методов, а также решение при помощи этих методов большого числа частных задач упругой устойчивости принадлежат С. П. Тимошенко².

Принципиальным шагом вперед в разработке приближенных методов решения задач упругой устойчивости явилось опубликование Б. Г. Галеркиным в 1915 г. нового вариационного метода³, основная идея которого была указана И. Г. Бубновым за два года до этого⁴.

Метод Бубнова—Галеркина также основан на аппроксимировании искомой функции при посредстве конечного числа известных функций, удовлетворяющих граничным условиям задачи. Однако в отличие от метода Ритца метод Бубнова—Галеркина использует непосредственно дифференциальное уравнение задачи, а не выражение для потенциальной энергии системы. Будучи идейно близок к методу Ритца, метод Бубнова—Галеркина обладает преимуществами простоты и общности, выдвинутыми его на первое место как эффективное и удобное средство приближенного решения разнообразных задач динамики и теории устойчивости.

Развитие вариационных методов мы находим в трудах советских ученых, из которых в первую очередь следует назвать М. В. Келдыша⁵, Л. С. Лейбензона⁶, Ю. В. Репмана⁷, Я. А. Пратусевича⁸.

Задачи упругой устойчивости допускают также решение при помощи теории интегральных уравнений, как это было показано

¹ Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов, «Известия Академии наук СССР», 1930.

² С. П. Тимошенко, Устойчивость упругих систем, Гостехиздат, 1946.

³ Б. Г. Галеркин, Стержни и пластинки, «Вестник инженеров» № 19, 1915, также «Собрание сочинений», т. I, изд. Академии наук СССР, 1952.

⁴ И. Г. Бубнов, Отзыв на работу Тимошенко «Об устойчивости упругих систем», «Сборник Института инженеров путей сообщения», 1913.

⁵ М. В. Келдыш, О методе акад. Галеркина для решения краевых задач, «Известия Академии наук СССР», серия матем., т. 6, № 6, 1942.

⁶ Л. С. Лейбензон, Вариационные методы решения задач теории упругости, Гостехиздат, 1943.

⁷ Ю. В. Репман, К вопросу математического обоснования метода Галеркина решения задач об устойчивости упругих систем, «Прикладная математика и механика», изд. Академии наук СССР, 1940.

⁸ Я. А. Пратусевич, Вариационные методы в строительной механике, Гостехиздат, 1948.

рядом исследователей¹. Это решение может быть получено при помощи разрешающего ряда (резольвенты).

Применение теории интегральных уравнений к задачам устойчивости позволяет построить разнообразные методы приближенного определения критической силы и формы потери устойчивости.

Основываясь на теории интегральных уравнений и используя общие свойства задачи о колебаниях упругих систем, С. А. Бернштейн разработал метод определения наименьшей частоты собственных колебаний при помощи так называемой спектральной функции². Развитие идей этого метода можно найти в работе А. Ф. Смирнова³.

На теории интегральных уравнений опирается также метод последовательных приближений (метод итерации). Первоначально метод итерации был предложен в графоаналитической форме⁴, однако такая трактовка не является обязательной. Развитием метода итерации в аналитической форме занимался Б. Н. Горбунов⁵.

Решение задачи устойчивости в большинстве случаев приводит к условию равенства нулю определителя системы линейных однородных алгебраических уравнений. Разыскание корней получающегося таким образом уравнения при высоком порядке определителя представляет собой трудную вычислительную задачу. Для часто встречающегося случая, когда уравнение это является «вековым» (параметр входит только в элементы главной диагонали определителя), выдающийся советский ученый и кораблестроитель А. Н. Крылов⁶ предложил специальный метод решения, обоснованный и развитый Н. Н. Лузиным⁷ и Ф. Р. Гантмахером⁸.

¹ E. Trefftz, Allgemeine Theorie der Knickung geraden Stäben, „Zeitschrift für angew. Math. und Mech“, 1923. Я. Л. Нудельман, Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем, Гостехиздат, 1949. С. Д. Лейтес, О применении метода сил к исследованию устойчивости статически неопределимых систем, „Исследования по теории сооружений“, вып. 1У, Госстройиздат, 1949.

² С. А. Бернштейн, Новый метод определения частот колебаний упругих систем, изд. ВИА РККА, 1939.

³ А. Ф. Смирнов, Статическая и динамическая устойчивость сооружений, Трансжелдориздат, 1947.

⁴ L. Vianello, Graphische Untersuchung der Knickfestigkeit gerader stäbe, VDI, 1898.

⁵ Б. Н. Горбунов, Расчет устойчивости стержней и арок при помощи последовательных приближений, „Исследования по теории сооружений“, Сборник статей, ОНТИ, 1936.

⁶ А. Н. Крылов, О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем, „Известия Академии наук СССР“, 1931.

⁷ Н. Н. Лузин, О методе акад. А. Н. Крылова составления векового уравнения, „Известия Академии наук СССР“, 1931.

⁸ Ф. Р. Гантмахер, К алгебраическому анализу методы акад. А. Н. Крылова составления векового уравнения, „Труды 2-го Всесоюзного математического съезда“, т. II, 1934.

Решение дифференциального или интегрального уравнения может быть получено при помощи численных методов, основанных на замене дифференциалов разностями и определенных интегралов — суммами.

В разработку таких численных методов значительный вклад внесли советские ученые: А. Н. Крылов¹, Л. В. Канторович, В. И. Крылов² и др.

Практическая необходимость в применении численных методов возникает при рассмотрении устойчивости центрально сжатого упругого стержня, жесткость которого изменяется вдоль его длины. Замкнутое аналитическое решение этой задачи возможно лишь для небольшого числа частных случаев. Основываясь на методе численного интегрирования, А. Н. Динник³ определил величину критической силы для большого числа типов стержней переменной жесткости.

Для исследования устойчивости стержней переменного сечения очень удобным является также метод Бубнова—Галеркина.

Первое решение задачи Лагранжа (1773) о форме сжатого стержня, имеющего наименьший объем (вес) при заданном значении критической силы, принадлежит русскому академику Клаузену (1839). Впоследствии этой задачей занимались Е. Л. Николаи⁴ и Н. Г. Ченцов⁵.

Оригинальная идея была выдвинута Ф. А. Беляковым, который предложил задаваться некоторым аналитическим выражением для упругой кривой и отсюда при помощи дифференциального уравнения задачи определять закон изменения жесткости стержня по его длине⁶.

Для стержня, сжатого распределенными вдоль его длины силами, дифференциальное уравнение устойчивости допускает интегрирование при помощи функций Бесселя. Возможно также решение этой задачи приближенными методами. Основные случаи распределения сжимающей нагрузки были рассмотрены Ф. С. Ясинским⁷, которому принадлежит также первое исследование устойчивости сжатого пояса открытого моста. Ясинский

¹ А. Н. Крылов, Лекции о приближенных вычислениях, изд. Академии наук СССР, 1950.

² Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, Гостехиздат, 1950.

³ Первые работы А. Н. Динника по вопросам устойчивости опубликованы в «Известиях Екатеринославского горного института» и относятся к 1914 г. См. его монографию «Устойчивость упругих систем», 1935 и переработанное издание последней под названием «Продольный изгиб», 1939.

⁴ Е. Л. Николаи, Задача Лагранжа о наивыгоднейшем очертании колонн, «Известия СПб политехнического института», 1907.

⁵ Н. Г. Ченцов, Стойки наименьшего веса, «Известия ЦАГИ», 1936.

⁶ Ф. А. Беляков, Статика жестких статически неопределимых систем на новых основаниях, «Statica Nova», Харьков, 1933.

⁷ Ф. С. Ясинский, Устойчивость деформаций и статика сооружений, 1903.

рассматривал сжатый пояс открытого моста как шарнирно опертый на концах стержень постоянного поперечного сечения, находящийся в упругой среде и нагруженный распределенной по закону треугольника сжимающей нагрузкой. Аналогичную задачу, но при постоянной сжимающей силе и переменном коэффициенте упругости среды решили Б. М. Броуде и Г. М. Чувикин¹.

Деформация изгиба потерявшего устойчивость стержня сопровождается появлением поперечной силы. Влияние, оказываемое последней, обычно невелико и для сплошных стержней может не учитываться. Для составных стержней на планках или с соединительной решеткой учет влияния поперечной силы обязателен. Исследованием этого влияния занимались различные авторы; наиболее строгие результаты получены А. Р. Ржаницыным².

Исследование работы сжато-изогнутого упругого стержня на основе технической теории изгиба приводит к линейному дифференциальному уравнению, которое отличается от однородного уравнения упругой устойчивости наличием члена, не содержащего искомой функции. Общий интеграл этого уравнения может быть представлен в виде суммы общего решения однородного уравнения и любого частного решения полного уравнения. Решение таким путем любых возможных случаев сочетания изгиба со сжатием не представляет затруднений.

Разнообразные случаи поперечной нагрузки на сжатый стержень были исследованы еще в начале нашего столетия А. Фан дер Флитом³. Аналогичные задачи рассматривал К. С. Завриев, который составил таблицы для наиболее часто встречающихся случаев⁴.

Существенное упрощение при решении этой задачи получил И. Г. Бубнов в своем классическом труде⁵, основываясь на специальном методе интегрирования дифференциального уравнения. И. Г. Бубнов выбирает систему фундаментальных функций так, чтобы удовлетворялись условия Коши.

Применение аналогичного метода к исследованию изгиба балок на сплошном упругом основании позволило А. Н. Кры-

¹ Б. М. Броуде и Г. М. Чувикин, Устойчивость сжатых поясов в открытых мостах, «Материалы проектной конторы Стальконструкция», вып. VIII, М. 1940.

² А. Р. Ржаницын, Теория составных стержней строительных конструкций, Стройиздат, 1948.

³ А. Фан дер Флит, К вопросу о сложном сопротивлении изгиба сжатию, «Известия собрания Института путей сообщения», 1900.

⁴ К. С. Завриев, Расчетные формулы прочности в особых случаях, ОНТИ, Главная редакция строительной литературы, 1935.

⁵ И. Г. Бубнов, Строительная механика корабля, т. I, 1912.

лову¹ получить значительное упрощение в технике расчета таких балок. Появление работы А. Н. Крылова способствовало широкой популяризации метода, который был применен ко многим задачам строительной механики и получил название метода *начальных параметров*. Это название, ставшее уже общепринятым, не отражает, однако, всех принципиальных особенностей метода.

Необходимо отметить, что приоритет И. Г. Бубнова в разработке метода начальных параметров остался неизвестным², хотя работа Бубнова опубликована за 19 лет до появления книги А. Н. Крылова. Выдающийся вклад И. Г. Бубнова во многие области строительной механики не получил еще должной оценки.

Детальная разработка метода начальных параметров в применении к исследованию сжато-изогнутых стержней произведена Н. К. Снитко³ и другими советскими исследователями.

Большой общностью обладают методы операционного исчисления, разнообразные примеры применения которого к задачам механики показаны в книге А. И. Лурье⁴. Исследование работы сжато-изогнутого стержня методами операционного исчисления позволяет получить те же упрощения, что и в случае применения метода начальных параметров. К этому же кругу идей примыкает предложенный Н. М. Герсевановым метод функциональных прерывателей⁵.

Помимо аналитического решения, исследование работы сжато-изогнутых стержней может быть произведено на основе графических или графоаналитических методов. Возможны различные варианты графического решения задачи; заслуживают быть отмеченными работы Г. Д. Абрамова⁶, А. Р. Ржаницына⁷, Ю. И. Ягна⁸. Широкое распространение имеет также метод кругов Н. Г. Ченцова.

¹ А. Н. Крылов, О расчете балок, лежащих на упругом основании, изд. Академии наук СССР, 1931. Краткое изложение метода можно найти в статье М. М. Филоненко-Бородича, помещенной в сборнике «Металлические конструкции», 1934.

² См., например, И. М. Рабинович, Достижения строительной механики стержневых систем в СССР, изд. Академии архитектуры СССР, 1949.

³ Н. К. Снитко, Расчет сжато-изогнутых стержней, «Проект и стандарт» № 1, 1938; Устойчивость стержневых систем, Госстройиздат, 1952.

⁴ А. И. Лурье, Операционное исчисление и его приложения к задачам механики, Гостехиздат, 1951. Первое издание этой книги вышло в 1938 г.

⁵ Н. М. Герсеванов, Функциональные прерыватели и их применение в строительной механике, сборник «Основания и фундаменты» № 2, 1934. См. также «Собрание сочинений», т. 2, Стройвоенмориздат, 1948.

⁶ Г. Д. Абрамов, Графический расчет сжатых и сжато-изогнутых стержней, Гособорониздат, 1939.

⁷ А. Р. Ржаницын, Графический метод решений некоторых задач на продольный изгиб, «Строительная промышленность» № 11, 1938.

⁸ Ю. И. Ягн, Графическое исследование вопросов устойчивости деформации стержней, Ленинградский машиностроительный институт, вып. 2, 1943.

Элементарная (линейная) трактовка проблемы упругой устойчивости позволила решить большое число задач этого типа.

Нелинейное дифференциальное уравнение устойчивости, основанное на точном выражении для кривизны, допускает решение в замкнутой форме посредством эллиптических интегралов.

Решение может быть получено также при помощи рядов. Первые исследования задач упругой устойчивости на основе точного уравнения принадлежат еще Лагранжу¹. Детальное освещение этого вопроса достигнуто благодаря трудам советских исследователей А. Н. Крылова², П. Ф. Папковича³, Е. Н. Тихомирова⁴, М. М. Мосткова⁵ и др. В интересной работе М. М. Филоненко-Бородича⁶ дано объединенное решение задачи упругой устойчивости, из которого как частные случаи можно получить и элементарное, и уточненное решение.

Советскими учеными детально разработан вопрос о больших деформациях гибких упругих стержней. Выяснено существование многообразных форм равновесия, обнаружено и исследовано явление *перескока* из одного положения в другое. Эти вопросы с большой полнотой рассмотрены в книге Е. П. Попова⁷, удостоенной Сталинской премии.

На основе проведенных исследований поведение центрально сжатого упругого стержня рисуется следующим образом. При сжимающей силе, меньшей критического (эйлерова) значения, единственно возможной является прямолинейная форма равновесия. При сжимающей силе, величина которой превышает критическое значение, наряду с прямолинейной формой равновесия возможна также и криволинейная форма, причем прямолинейная форма является неустойчивой, криволинейная форма равновесия — устойчива. Это означает, что стержень, выведенный из состояния прямолинейного равновесия, будет от него отклоняться, пока не придет к состоянию криволинейной формы равновесия. Наоборот, отклоненный от криволинейной формы равновесия

¹ J. L. Lagrange, Sur la figure des colonnes, „Miscellanea Taurinensia“ 1770/1773.

² А. Н. Крылов, О формах равновесия сжатых стоек, «Известия Академии наук СССР», 1931; также «Собрание трудов», т. 5, изд. Академии наук СССР.

³ П. Ф. Папкович, цит. соч.

⁴ Е. Н. Тихомиров, статьи в журнале «Вестник инженеров и техников», 1934 и 1936; статьи в «Трудах Московского механико-машиностроительного института имени Баумана», 1936 и 1941; статьи в «Трудах Московского авиационного института», 1935 и 1945.

⁵ М. М. Мостков, Уточненные решения вопросов устойчивости и изгиба, Гостехиздат, 1935.

⁶ М. М. Филоненко-Бородич, О некоторых свойствах дифференциального уравнения эйлеровой задачи, «Известия МВТУ», 1929.

⁷ Е. П. Попов, Нелинейные задачи статики тонких стержней, Гостехиздат, 1948.

стержень будет стремиться к ней вернуться. Таким образом, критическое состояние сжатого стержня является границей разветвления форм равновесия.

Состояние потери устойчивости для центрально сжатого стержня характеризуется некоторыми явлениями, общими как для линейной, так и для нелинейной трактовки задачи. Во-первых, при достижении сжимающей силы критического значения в критическом состоянии имеет место резкое падение сопротивления стержня по отношению к внешним факторам, стремящимся отклонить стержень от прямолинейной формы равновесия. Во-вторых, явление потери устойчивости характеризуется возможностью существования нескольких равновесных состояний при одном и том же значении сжимающей силы.

Элементарное решение устанавливает это свойство разветвления для одного единственного значения сжимающей силы — для критического значения — и допускает при этом возможность существования бесчисленного множества форм равновесия. Уточненное решение показывает несколько иную картину, однако возможность существования нескольких равновесных форм может рассматриваться как объединяющий признак критического состояния независимо от того, основывается ли решение на линейной или же на нелинейной трактовке задачи.

Элементарное решение не дает возможности произвести количественную и качественную оценку явления при значениях сжимающей силы, близких к критическому, однако позволяет найти точную величину критической силы. Элементарное решение дает возможность найти приближенную величину деформации сжатого изогнутого стержня при сжимающей силе, меньшей критического значения. По мере приближения величины сжимающей силы к критическому значению точность элементарного решения уменьшается.

Развитие теории сжато-изогнутых стержней в рамках представлений о безграничной применимости закона Гука не могло полностью удовлетворить потребности практики, поскольку еще в середине прошлого века было замечено, что для стержней малой гибкости формула Эйлера не подтверждается опытом. После того как было со всей отчетливостью осознано, что формула Эйлера справедлива только лишь до тех пор, пока вычисленное по этой формуле критическое напряжение не превышает предела пропорциональности материала, стало ясно, что обобщение теории устойчивости на область неупругих деформаций возможно лишь на основе анализа фактической работы материала за пределом упругости.

Первая попытка такого рода принадлежит Энгессеру, который первоначально предложил¹ заменить модуль упругости в формуле Эйлера касательным модулем, т. е. тангенсом угла на-

¹ F. Engesser, Zeitschrift für Arch. u. Jng. Wesen, 1889.

клона касательной к графику удлинений — напряжений материала. Однако это предложение не учитывало того обстоятельства, что на выпуклой стороне стержня, где имеет место уменьшение сжимающих напряжений вследствие изгиба, т. е. в зоне разгрузки, зависимость между удлинением и напряжением определяется постоянным модулем упругости. На необходимость учета двух разных модулей в зонах нагрузки и разгрузки обратил внимание Ф. С. Ясинский, который внес в теорию Энгессера необходимые исправления¹. Эта теория в исправленном виде завоевала всеобщее признание, когда спустя 15 лет Т. Кáрман выдвинул ее вновь и подтвердил экспериментами².

Полученные результаты позволили приспособить формулу Эйлера к неупругой области путем замены модуля упругости некоторым обобщенным модулем, зависящим от формы поперечного сечения стержня. Для практических целей оказалось возможным пренебречь влиянием формы поперечного сечения и принять некоторое среднее значение обобщенного модуля.

Теорию потери устойчивости сжатого стержня в неупругой области называют часто теорией Энгессера — Кáрмана, несправедливо упуская значительный вклад Ясинского в ее построение.

Рассматриваемая задача является первой по времени инженерной задачей, для решения которой был применен метод расчета, учитывающий пластические свойства материала. Прогресс в этой области возможен только на основе применения общих методов теории пластичности. В разработке теории пластичности значительные достижения принадлежат советским ученым, в первую очередь А. А. Ильюшину³ и В. В. Соколовскому⁴, труды которых удостоены Сталинской премии.

Основываясь на гипотезе об идеальном упруго-пластическом материале с площадкой текучести неограниченной длины, К. Ежек⁵ произвел исследование работы сжато-изогнутых стержней. Дифференциальное уравнение задачи имеет достаточно сложный вид; структура этого уравнения зависит от формы поперечного сечения стержня. Замкнутое аналитическое решение оказалось возможным только лишь для стержней прямоугольного поперечного сечения. Ежек разработал также приближенный метод решения, позволяющий оценить влияние формы поперечного сечения стержня. Идея приближенного метода заключается в замене фактической кривой изгиба шарнирно опертого стержня

¹ Ф. С. Ясинский, две статьи в журнале „Schweiz. Bauzeitung“, 1895 — статья в журнале „Zeitschrift Ver. deut. Ing.“, 1898. См. также „Избранные работы по устойчивости сжатых стержней“, 1952.

² Th. v. Kármán, Untersuchungen über Knickfestigkeit, „Mitteilungen über Forschungsarbeiten“, Н. 81, 1910.

³ А. А. Ильюшин, Пластичность, Гостехиздат, 1948.

⁴ В. В. Соколовский, Теория пластичности, изд. Академии наук СССР, 1946.

⁵ K. Jezek, Die Festigkeit von Druckstäben aus Stahl, 1937. Серия статей в журнале „Stahlbau“, 1935 и 1936.

синусоидой при соблюдении условий равновесия между внешними и внутренними силами только в поперечном сечении, находящемся в середине пролета.

Работа сжато-изогнутого стержня, материал которого обладает четко выраженной площадкой текучести, характеризуется следующими особенностями. Если построить график зависимости осевого сжимающего напряжения от прогиба стержня, то окажется, что кривая эта имеет точку максимума. Для напряжений, меньших предельного, возможно существование двух состояний равновесия — первичного и вторичного. Первичному равновесному состоянию соответствует точка, расположенная на восходящей ветви графика, вторичному состоянию — точка на нисходящей ветви кривой. Первичное равновесное состояние образуется в процессе естественного возрастания нагрузки и является устойчивым, вторичное равновесное состояние — неустойчиво. Точка максимума характеризует состояние потери устойчивости; соответствующее осевое сжимающее напряжение называется критическим. Такое название оправдано, так как это предельное состояние качественно отличается от наблюдаемого при исчерпании несущей способности состояния, например, при упруго-пластическом изгибе.

Такое явление потери устойчивости, связанное с наличием точки максимума на графике прогиб — сжимающая сила, называется потерей устойчивости второго рода в отличие от явления потери устойчивости первого рода для центрально сжатых упругих стержней.

Задача построения методики расчета сжатых и сжато-изогнутых стержней включает в себя следующие составные элементы:

- 1) формирование строго научной точки зрения на сущность явления, объясняющей все многообразие известных факторов и устраняющей противоречия между результатами отдельных исследований; тщательный отбор основных положений и фактов, которые кладутся в основу методики;

- 2) создание безупречной в методическом отношении схемы расчета; выбор характеристики предельного состояния; установление структуры расчетных формул;

- 3) изучение действительных условий работы конструкций при их эксплуатации, установление целесообразной величины коэффициентов запаса прочности и устойчивости; проверка теоретических данных лабораторными экспериментами и опытом эксплуатации конструкций.

Здесь мы остановимся только на принципиальных этапах формирования методики расчета сжатых и сжато-изогнутых стержней главным образом в стальных конструкциях промышленных зданий и сооружений.

В основу расчетной методики оказалось целесообразным положить линейную трактовку проблемы устойчивости, удовлетво-

ряющую требованиям простоты и обеспечивающую необходимую для практических целей точность.

Принципиальное значение для рассматриваемой задачи имело введенное Ф. С. Ясинским¹ в 1892 г. понятие о *свободной длине* стержня. Это весьма плодотворное понятие основано на зависимости между длиной полуволны потерявшего устойчивость стержня и величиной критической силы. На понятии свободной длины базируется понятие *гибкости* стержня, лежащее в настоящее время в основе расчетной методики для всех без исключения случаев.

В силу исторических традиций расчетным формулам придается структурная форма проверки напряжений и в качестве критерия прочности и устойчивости служит сравнение некоторого условного напряжения с допускаемым напряжением. Задача расчета центрально сжатых стержней в этой методике относительно легко решалась введением в формулу простого сжатия коэффициента уменьшения допускаемого напряжения. Построение этого коэффициента как функции гибкости стержня основывается на критических напряжениях, вычисленных с учетом работы материала в неупругой области, и на коэффициенте запаса, который оценивает также влияние начальной криволинейности стержня и случайных эксцентриситетов.

При расчете сжато-изогнутых стержней весьма широким распространением пользуется двучленная формула Ясинского. Не будучи строго обоснована, эта формула обладает рядом существенных достоинств. Построенная на использовании коэффициента снижения допускаемых напряжений при центральном сжатии, формула Ясинского сохраняет свою силу и в предельных случаях — при отсутствии поперечной нагрузки и при отсутствии сжимающей силы. Чрезвычайную жизнеспособность формулы Ясинского неправильно было бы объяснять только ее простотой и практичностью. Хотя отдельные компоненты этой формулы нельзя рассматривать как реальные напряжения, анализ формулы Ясинского в свете современных представлений показывает, что точность ее достаточна для практических целей. Эти обстоятельства определяют широкую популярность формулы Ясинского в кругах инженеров-строителей.

Построение логически безупречной схемы расчета сжато-изогнутых стержней является заслугой К. С. Завриева¹, который принял в качестве характеристики предельного состояния достижение фибровыми напряжениями предела текучести. Составленные К. С. Завриевым таблицы для разных случаев сочетания из-

¹ Ф. С. Ясинский, «Бюллетень общества инженеров путей сообщения», 1892.

² К. С. Завриев, Сопоставление упругих стержней сложному продольному изгибу, «Сборник Института инженеров путей сообщения», 1913. См. также К. С. Завриев, Расчетные формулы прочности в особых случаях, ОНТИ, 1935.

гиба со сжатием не нашли себе применения в инженерной практике, однако идеи Завриева сыграли значительную роль в формировании современной концепции расчета сжато-изогнутых стержней.

Анализу и разработке структуры расчетных формул посвящены исследования Б. М. Броуде¹, В. В. Пинаджана², В. Г. Писчикова³ и др.

Теоретические исследования, положенные в основу методики расчета сжатых и сжато-изогнутых стержней, были подтверждены многочисленными опытами, произведенными в СССР как с целью оценки степени точности расчетных формул, так и с целью учета влияния различных факторов. Здесь должны быть упомянуты эксперименты над сжатыми и сжато-изогнутыми стержнями, поставленные Н. Г. Добудогло⁴, С. Н. Никифоровым⁵, В. В. Пинаджаном⁶ и др.

Большое значение для теории устойчивости имеет разработка вопросов, связанных с понятием о коэффициенте запаса. Анализ природы коэффициента запаса на базе теории вероятностей является заслугой советских исследователей Н. С. Стрелецкого⁷, А. Р. Ржаницына⁸ и др.

Выдающимся достижением советской научно-технической мысли является разработка новой методики расчета строительных конструкций по предельному состоянию. При этом возможность превышения фактической эксплуатационной нагрузки над расчетным ее значением оценивается коэффициентом перегрузки, стабильность механических свойств материала — коэффициентом однородности, особенности работы конструкций — коэффициентом условий работы.

Такая схема расчета, помимо методических достоинств, имеет то преимущество, что позволяет назначать дифференцированные

¹ Б. М. Броуде, О расчете сжато-изогнутых стержней, «Материалы проектной конторы Стаьконструкция», вып. V, 1939.

² В. В. Пинаджан, К вопросу о несущей способности сжато-изогнутых стержней, «Проект и стандарт» № 1, 1936.

³ В. Г. Писчиков, Унификация методов расчета элементов на сжатие с изгибом, «Исследования по теории сооружений», вып. IV, Стройиздат, 1949.

⁴ Н. Г. Добудогло, Опытное исследование устойчивости металлических строительных профилей при центральном сжатии, «Труды лаборатории строительной механики ЦНИПС», Стройиздат, 1941—1942.

⁵ С. Н. Никифоров, Устойчивость сжатых стержней сварных ферм, Госстройиздат, 1938.

⁶ В. В. Пинаджан и А. К. Шаншиев, Экспериментальное исследование устойчивости внецентренно сжатых стальных стержней, «Строительная промышленность» № 11, 1938.

⁷ Н. С. Стрелецкий, К вопросу установления коэффициента запаса сооружений, «Известия Академии наук СССР. Отдел технических наук» № 1, 1947. Этому же вопросу посвящен ряд работ Н. С. Стрелецкого, опубликованных в разное время, начиная с 1926 г.

⁸ А. Р. Ржаницын, Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов, Стройвоенмориздат, 1949.

значения коэффициентов перегрузки для различных видов силовых воздействий в соответствии с их природой.

Дальнейшим этапом в развитии теории устойчивости явился переход от исследования отдельных стержней с теми или иными опорными закреплениями к исследованию устойчивости стержневой системы в целом.

Первые работы по исследованию устойчивости стержневых систем принадлежат Б. Г. Галеркину¹, который рассмотрел ряд частных случаев. Практические трудности при решении задач такого рода заключаются в необходимости интегрировать дифференциальное уравнение для каждого из стержней в отдельности и составлять условия сопряжения для каждого из узлов системы. Такой, с принципиальной стороны ясный, путь решения задачи приводит к определителю высокого порядка, разыскание корней которого представляет собой трудоемкую работу.

Весь предшествующий путь теории устойчивости основывается на идеях и методах классической теории упругости. Решение новых задач теории устойчивости оказалось возможным на основе сближения со смежной дисциплиной—строительной механикой, в особенности с той ее областью, которая рассматривает статически неопределимые системы.

Плодотворные идеи строительной механики привели к созданию эффективных методов расчета статически неопределимых систем — метода сил, метода деформаций и смешанного метода. Принципиальной особенностью этих методов является каноническая структура расчетных уравнений, в разработку которой выдающийся вклад внесли советские ученые², в особенности А. А. Гвоздев, И. М. Рабинович и П. Л. Пастернак.

Весьма эффективным для решения задач устойчивости рамных систем оказалось обобщение метода деформаций, предложенное А. А. Белоусом³, Н. В. Корноуховым⁴ и С. Д. Лейтесом⁵. При этом схема расчета и канонические уравнения получаются вполне аналогичными обычному методу деформаций в теории статически неопределимых систем. Отличие заключается лишь в том, что для сжатых стержней реакции основной системы, являющиеся коэффициентами канонических уравнений, представляют собой не числа, но некоторые функции от величины сжимаю-

¹ Б. Г. Галеркин, Теория продольного изгиба, «Известия Петербургского политехнического института», 1909; Стержни и пластинки, «Вестник инженеров», 1915. См. также «Собрание сочинений», т. I, 1952.

² И. М. Рабинович, Достижения строительной механики стержневых систем в СССР, изд. Академии архитектуры СССР, 1949.

³ А. А. Белоус, Устойчивость овальных и рамных шпангоутов, «Труды ЦАГИ», вып. 334, 1937.

⁴ Н. В. Корноухов, Точный метод проверки устойчивости плоских рам, «Вестник инженеров и техников» № 3, 1937.

⁵ С. Д. Лейтес, Общий метод определения эйлеровой критической силы для сжатых стержней рамных конструкций, «Проект и стандарт» № 7, 1937.

щей силы в этих стержнях. Если сжимающие силы в элементах рамы заданы с точностью до некоторого постоянного числового множителя, то, приравнявая нулю определитель системы канонических уравнений метода деформаций, мы получаем аналитическое условие потери устойчивости, позволяющее вычислить наименьшее критическое значение этого множителя. Отсюда определяются величина критической силы и свободные длины для сжатых стержней рамы.

Обобщение метода деформаций позволяет также определить усилия в сжато-изогнутых стержнях рамы с учетом влияния сжимающих сил на величину изгибающих моментов. Для этого канонические уравнения метода составляют с учетом грузовых членов; полученная система линейных уравнений может быть решена, если сжимающие силы в стержне рамы меньше критических. Расчет на основе деформированной схемы сооружения представляет собой дальнейшее развитие и обобщение теории статически неопределимых систем и рассматривается Н. В. Корноуховым как задача устойчивой прочности сооружения.

Детальная разработка метода деформаций принадлежит Н. В. Корноухову¹, который исследовал все варианты этого метода, изучил свойства реакций основной системы и решил большое число практически важных задач.

Принципиальная возможность использовать метод сил для решения задач устойчивости указана В. Г. Чудновским² и С. Д. Лейтесом³. Идея заслуживает внимания, однако практическое использование этого метода весьма затрудняется сложностью исследования основной системы. Для отдельных задач применение метода сил оказывается удачным.

Необходимо отметить, что заслуга первого применения метода сил к решению задач устойчивости принадлежит И. Г. Бубнову. Исследуя устойчивость сжатой неразрезной балки на упругих опорах⁴, И. Г. Бубнов применил по существу дела метод сил, не пользуясь, однако, терминологией и символикой, присущими этому методу. В этом исследовании Бубнов выдвинул интересную и практически важную задачу установления того предельного значения коэффициента упругости опор, при котором опоры не испытывают перемещений в момент потери устойчивости, т. е. ведут себя как абсолютно жесткие. Эта задача получила название задачи Бубнова. Бубнов вычислил предельные значения коэффициента упругости опор для простейшего случая равных пролетов, постоянства жесткости балки и постоянства сжимающей силы,

¹ Н. В. Корноухов, Прочность и устойчивость стержневых систем, Гостройиздат, 1949.

² В. Г. Чудновский, Расчет рам на устойчивость методом сил. Сборник, посвященный 75-летию Е. О. Патона, изд. Академии наук УССР, 1946.

³ С. Д. Лейтес, О применении метода сил к исследованию устойчивости статически неопределимых систем, «Исследования по теории сооружений», вып. IV, Стройиздат, 1949.

⁴ И. Г. Бубнов, Строительная механика корабля, ч. I, 1912.

основываясь на уравнениях метода сил. Некоторое обобщение задачи Бубнова указано Я. Л. Нудельманом¹; задача эта допускает и более широкую трактовку.

Трудная задача об устойчивости неразрезной балки на упругих опорах привлекла внимание многих исследователей в связи с практическим значением, которое эта задача имеет для расчета сжатых поясов открытых мостов. Ф. Блейх, основываясь на уравнениях смешанного метода, т. е. принимая в качестве неизвестных как силовые факторы (моменты), так и деформации (перемещения опор), получил решение для равнопролетной балки². Замкнутая форма решения для любого числа пролетов здесь оказалась возможной вследствие применения уравнений в конечных разностях. Более полные результаты получены П. Ф. Палковичем³, который дал весьма изящное решение задачи на основе применения метода Ритца.

Применение смешанного метода для исследования устойчивости рам было предложено Г. Д. Абрамовым⁴. Идеи фокальных методов также были использованы при решении задач устойчивости.

Новый этап развития теории устойчивости характеризуется не только широким распространением канонических методов, но и новым подходом к решению задач. Если раньше, решая конкретную задачу устойчивости, исследователь, как правило, ограничивался частными значениями параметров, определяющими условия задачи, и в результате исследования получал число, то на новом этапе обычно разыскивается функциональная зависимость решения от параметров задачи. Такими параметрами задачи могут быть число пролетов, соотношение между сжимающими силами или между жесткостями элементов системы и т. п. Результаты решения подобного рода обобщенной или типовой задачи, эквивалентные результатам решения серии частных или индивидуальных задач, представляются в виде графика, таблицы или же приближенной формулы.

Представленные в такой форме результаты исследования типовой задачи допускают их непосредственное использование в инженерной практике.

Подавляющее большинство практически важных явлений потери устойчивости связаны с возникновением и развитием деформации изгиба. Однако для шарнирно-стержневой системы, элементы которой испытывают только продольные усилия и деформации, возможно явление потери устойчивости при сохранении элементами системы своей прямолинейной формы. Теория этого

¹ Я. Л. Нудельман, Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем, Гостехиздат, 1949.

² Ф. Блейх, Теория и расчет железных мостов, Гострансиздат, 1931.

³ П. Ф. Палкович, Строительная механика корабля, ч. II, Судпромгиз, 1941.

⁴ Г. Д. Абрамов, Упругая устойчивость ступенчато-сжатых рам, «Строительная промышленность» № 5, 1939.

явления, данная Р. Мизесом¹, получила развитие в работах Я. Л. Нудельмана² и Н. В. Корноухова³.

Представляет интерес выдвинутая советскими учеными проблема изучения механизма потери устойчивости. Здесь надо отметить упомянутое выше явление перескока, при котором стержень переходит от одной формы равновесия к другой форме не путем непрерывного и плавного изменения своих равновесных состояний, а путем мгновенного скачка через неравновесные состояния. Автору этой книги принадлежит попытка исследования конечных упруго-пластических деформаций стержней при напряжении, близком к критическому⁴.

Вопросам динамической устойчивости сооружений посвящены работы Н. М. Беляева⁵, А. Ф. Смирнова⁶, И. И. Гольденבלата⁷ и др.

Теория тонкостенных стержней, созданная и разработанная советскими учеными, выдвигает ряд принципиально новых задач устойчивости. Основоположником этой теории является В. З. Власов, книга которого⁸ удостоена Сталинской премии. Вместо обычной гипотезы плоских сечений В. З. Власов принимает более общую гипотезу о недеформируемости контура поперечного сечения стержня. Эта гипотеза приводит к новому закону распределения удлинений по сечению, именно к закону секториальных площадей, включающему в себя как частный случай закон плоских сечений.

В трудах В. З. Власова и возглавляемой им школы теория тонкостенных стержней получила детальную разработку. Относящаяся к этому вопросу литература весьма обширна и заслуживает специального рассмотрения.

В создании современной теории устойчивости сжатых стержней и стержневых систем выдающуюся роль сыграли труды отечественных ученых. Характерная для советской науки черта — связь с практикой — позволила выковать цепь, соединяющую достижения теории устойчивости с инженерными методами расчета сжатых и сжато-изогнутых стержней.

¹ R. v. Mises, Über die Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie. Zeitschrift f. angew. Mathematik u. Mechanik, 1923. R. v. Mises und J. Ratzersdorfer, статьи в том же журнале, 1925 и 1923.

² Я. Л. Нудельман, К теории устойчивости идеальных ферм, «Прикладная математика и механика», т. VI, изд. Академии наук СССР, 1942.

³ Н. В. Корноухов, Прочность и устойчивость стержневых систем, Гостройиздат, 1949.

⁴ С. Д. Лейтес, К вопросу о механизме потери устойчивости, «Инженерный сборник», изд. Академии наук СССР, 1950.

⁵ Н. М. Беляев, Устойчивость призматических стержней под действием переменных продольных сил, сборник «Инженерные сооружения и строительная механика», изд. «Путь», Л. 1924.

⁶ А. Ф. Смирнов, Статическая и динамическая устойчивость сооружений, Трансжелдориздат, 1947.

⁷ И. И. Гольденблат, Динамическая устойчивость сооружений, Гостройиздат, 1948.

⁸ В. З. Власов, Тонкостенные упругие стержни (прочность, устойчивость, колебания), Гостройиздат, 1940.

УПРУГИЙ СЖАТЫЙ СТЕРЖЕНЬ

§ 1. УСТОЙЧИВОЕ И НЕУСТОЙЧИВОЕ РАВНОВЕСИЕ. МОДЕЛЬ. ЗАДАЧА Эйлера. КРИТИЧЕСКАЯ СИЛА

В первой главе рассматривается устойчивость центрально сжатых прямых стержней из идеально упругого материала, для которого справедлив закон Гука

$$\sigma = \varepsilon E, \quad (1)$$

где σ — нормальное напряжение;
 ε — относительное удлинение;
 E — модуль упругости материала.

Предварительно рассмотрим следующую простую задачу, которая будет способствовать пониманию более сложных явлений.

Бесконечно жесткий прямой стержень длиной l с шарнирно закрепленным нижним концом имеет на верхнем конце упруго смещающуюся опору (рис. 1). Стержень нагружен продольной сжимающей силой N . Если обозначить через y горизонтальное смещение упругой опоры и через H горизонтальную ее реакцию, то соотношение

$$H = \nu y \quad (2)$$

характеризует упругие свойства опоры, т. е. линейную зависимость между смещением y и реакцией H . Фактор пропорциональности ν мы будем называть *коэффициентом упругости* опоры. Очевидно, что пружинка, изображающая на нашем чертеже упругую опору, может символизировать собой любую упругую конструкцию, для которой величина ν может быть найдена расчетом.

Предположим, что некоторая внешняя причина сообщает верхнему концу стержня малое смещение y , после чего ее влия-

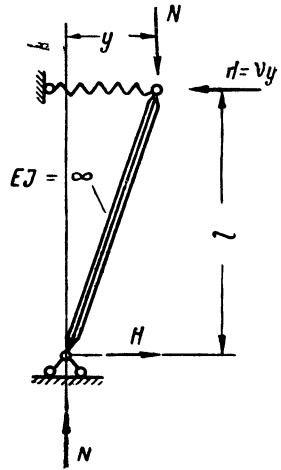


Рис. 1. Упруго опертый стержень (модель упругой устойчивости)

ние на систему устраняется. Условие равенства нулю суммы моментов всех действующих на стержень сил относительно нижнего шарнира дает

$$Ny - Hl = 0.$$

Принимая во внимание зависимость (2), получаем

$$(N - \nu l) y = 0. \quad (3)$$

Здесь возможны три случая. Если $N < \nu l$, то условие равновесия имеет место только при $y = 0$. Следовательно, после устранения внешней причины, вызвавшей малое смещение, стержень возвратится к своему первоначальному вертикальному положению. Если $N = \nu l$, то условие равновесия удовлетворяется при произвольном малом значении y . После устранения внешней причины стержень сохранит вызванное этой причиной смещение. Наконец, в третьем случае, при $N > \nu l$, после устранения внешней причины, вызвавшей смещение, стержень будет еще более отклоняться от первоначального вертикального положения, так как способствующий этому момент Ny больше удерживающего момента Hl .

В первом случае, при $N < \nu l$, мы имеем устойчивое равновесие, во втором случае, при $N = \nu l$, — безразличное равновесие и в третьем случае, при $N > \nu l$, — неустойчивое равновесие. Значение сжимающей силы $N = \nu l$, характеризующее границу между состоянием устойчивого и неустойчивого равновесия, называется критической силой

$$N_k = \nu l, \quad (4)$$

а состояние безразличного равновесия — критическим состоянием системы.

Таким образом, устойчивость системы характеризуется качеством равновесия между внешними и внутренними силами¹. Качество равновесия зависит от величины сжимающей силы и от упругих свойств системы. Количественное изменение величины сжимающей силы N при переходе ее через критическое значение N_k влечет за собой изменение качества равновесия. В этом смысле явление потери устойчивости представляет собой иллюстрацию закона о переходе количества в качество.

В строительной технике потеря устойчивости даже отдельного элемента конструкции всегда нарушает условия нормальной эксплуатации сооружения и часто влечет за собой серьезные аварии. Поэтому критическое состояние системы является опасным для сооружения.

¹ В нашем примере реакцию упругой опоры H следует рассматривать как внутреннюю силу системы.

Задача об устойчивости сжатого упругого стержня впервые была поставлена и разрешена Эйлером в 1744 г. в труде, посвященном созданию основных идей вариационного исчисления¹. Вывод так называемой формулы Эйлера легко получить путем интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси стержня.

Рассмотрим шарнирно опертый обоими концами стержень длиной l и постоянной жесткости EJ (рис. 2). Деформации

стержня в общем случае вызваны действием изгибающих моментов, поперечных и продольных сил. Влиянием работы поперечных сил условимся пренебрегать. Что касается продольных сил, будем учитывать их влияние

только на величину изгибающего момента; продольными удлинениями (укорочениями) стержня можно пренебречь. При этих допущениях деформация стержня определяется только его изгибом.

Предположим, как и всюду в этой главе, что возможна только плоская форма изгиба оси стержня. Дифференциальное уравнение изогнутой оси имеет вид

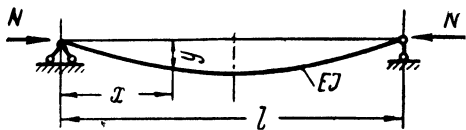


Рис. 2. Изгиб сжатого стержня при потере устойчивости

$$EJ \frac{1}{\rho} + M = 0. \quad (5)$$

Здесь M — изгибающий момент в точке с абсциссой x , $\frac{1}{\rho}$ — кривизна изгиба в данной точке

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

Если деформации стержня малы по сравнению с его длиной, то, пренебрегая квадратом первой производной как величиной малой по сравнению с единицей, получаем линейное дифференциальное уравнение, лежащее в основе технической теории изгиба балок.

$$EJ y'' + M = 0. \quad (6)$$

Помещая начало координат на одном из концов стержня, в нашем случае находим

$$M = Ny,$$

¹Leonhard Euler, Methodus inveniendi lineas curvas, 1744. Русский перевод: Л. Эйлер, Метод нахождения кривых линий, Гостехиздат, 1934.

и уравнение (6) принимает вид

$$EJy'' + Ny = 0. \quad (7)$$

Разделим обе части этого уравнения на EJ и обозначим

$$\alpha^2 = \frac{N}{EJ}, \quad (8)$$

тогда уравнение (7) запишется так:

$$y'' + \alpha^2 y = 0. \quad (9)$$

Общий интеграл этого линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка равен сумме двух частных решений и содержит две произвольные постоянные

$$y = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x, \quad (10)$$

которые должны быть определены из граничных условий, т. е. из условий закрепления концов стержня. В случае шарнирно опертого стержня этими условиями является равенство нулю прогибов на опорах:

1) $y = 0$ при $x = 0$;

2) $y = 0$ при $x = l$.

Первое условие

$$C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 = 0$$

дает $C_2 = 0$. Второе условие принимает вид

$$C_1 \sin \alpha l = 0.$$

Произведение равно нулю, если равен нулю один из сомножителей. Если $C_1 = 0$, то $y = 0$ по всей длине стержня, т. е. изгиба не происходит и стержень сохраняет свою прямолинейную форму. Постоянная C_1 может быть отлична от нуля только в том случае, если нулю равен второй сомножитель $\sin \alpha l$. Таким образом, условием существования криволинейной формы равновесия стержня является уравнение

$$\sin \alpha l = 0. \quad (11)$$

Отсюда находим

$$\alpha l = k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Величина сжимающей силы, при которой возможна криволинейная форма равновесия, определяется на основании (8):

$$N = \frac{k^2 \pi^2 EJ}{l^2}.$$

Если принять $k=0$, то $N=0$. В этом случае уравнение изогнутой оси стержня принимает вид

$$y = C_1 \sin 0 = 0,$$

т. е. стержень сохраняет свою первоначальную прямолинейную форму. Полагая $k=1$, находим уравнение изогнутой оси стержня

$$y = C_1 \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (12)$$

Если какая-либо внешняя причина выведет стержень из состояния прямолинейного равновесия и придаст ему форму (12), после чего влияние внешней причины будет устранено, то стержень сохранит эту криволинейную форму. Следовательно, при

$$N = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

стержень находится в состоянии безразличного равновесия, которое является границей между состояниями устойчивого и неустойчивого равновесия прямолинейной формы. Значение продольной сжимающей силы, соответствующее критическому состоянию стержня, называется критической силой

$$N_k = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (13)$$

Эта формула носит название формулы Эйлера, а определяемая ею критическая сила называется эйлеровой.

Из решения ясно, что прямолинейная форма равновесия возможна при всех значениях продольной сжимающей силы N . Однако эта прямолинейная форма устойчива лишь при значении $N < N_k$. При $N > N_k$ прямолинейная форма равновесия неустойчива, т. е. выведенный из состояния прямолинейного равновесия стержень уже к этому состоянию не возвращается. Значение N_k определяет собой состояние безразличного равновесия стержня, когда помимо прямолинейной формы изогнутой оси возможна еще криволинейная форма — синусоида (12) с произвольным малым параметром C_1 . Заметим, что величина C_1 является существенно неопределенной, т. е. она не может быть найдена путем каких-либо преобразований.

Случай $N=N_k$, когда, кроме прямолинейной формы равновесия, возможно еще бесчисленное множество криволинейных форм (12) с малым параметром C_1 , представляет собой характерное для состояния безразличного равновесия исключение из общего закона Кирхгофа¹, согласно которому для односвязного упругого тела существует одно единственное состояние равновесия.

Критическая сила (13) определяет собой то наименьшее значение продольной сжимающей силы, при которой возможна

¹ G. Kirchhoff, „Journ. f. Math.“, t 56, 1859.

потеря устойчивости стержня. Явление потери устойчивости стержня под действием продольной сжимающей силы в русской технической литературе иногда называют «продольным изгибом». Термин этот можно применять только в условном смысле; явление потери устойчивости не следует понимать как изгиб от центрально приложенной силы. Суть явления заключается в изменении качества равновесия. Если слегка нарушить прямолинейную форму равновесия стержня и затем предоставить стержень самому себе, то в случае $N < N_k$ он вернется к своей первоначальной прямолинейной форме, в случае $N = N_k$ — сохранит полученную деформацию, а в случае $N > N_k$ эта деформация будет возрастать. При отсутствии поперечных нагрузок на стержень всегда найдется причина, нарушающая его прямолинейную форму, например, случайное силовое воздействие, небольшое искривление оси стержня, случайный эксцентриситет приложения нагрузки и т. д.

Само собой разумеется, что, как только искривление стержня достигнет известной величины, предпосылка о малости деформации по сравнению с длиной стержня становится неверной, а решение, основанное на интегрировании приближенного уравнения (7), — непригодным. Интегрирование точного дифференциального уравнения (5), осуществляемое в рядах или при помощи эллиптических интегралов, позволяет описать поведение стержня при величине сжимающей силы, превышающей критическое значение.

Если мы представим себе идеальный стержень, абсолютно упругий и полностью подчиняющийся уравнению (8), то для такого стержня могут существовать также и высшие значения критической силы, получающиеся из нашего решения при $k=2,3,\dots$

$$N_k = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}; \quad N_k = \frac{9\pi^2 EJ}{l^2};$$

и соответствующие им формы изогнутой оси стержня. Эти высшие значения могут иметь практический смысл, если стержень по какой-либо причине преодолет состояние неустойчивого равновесия при низшем значении критической силы.

Рассмотренная в начале настоящего параграфа задача об устойчивости бесконечно жесткого упруго-опертого стержня является в известном смысле моделью явления потери устойчивости сжатого упругого стержня, представляя собой систему с одной степенью свободы. Деформированное состояние этой модели полностью определяется одной координатой — смещением вершины y . Вследствие этого отпадает необходимость разыскивать при помощи интегрирования дифференциального уравнения изгиба форму упругой кривой, как это приходится делать для системы с бесконечно большим числом степеней свободы — для сплошного упругого сжатого стержня.

§ 2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ. СВОЙСТВА ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ

При решении задач устойчивости часто прибегают к исследованию потенциальной энергии системы. Классические теоремы, относящиеся к свойствам потенциальной энергии упругой системы, имеют принципиальное значение для задач устойчивости; на этих теоремах основаны и приближенные методы вычисления величины критической силы.

Определение. *Потенциальной энергией упругой системы называют работу, совершаемую внутренними и внешними силами системы при переводе ее из деформированного состояния в начальное, недеформированное.*

Потенциальная энергия слегка изогнувшегося упругого сжатого стержня выражается суммой двух слагаемых:

$$П = V_1 + V_2,$$

где первое слагаемое представляет собой потенциальную энергию внутренних сил стержня при изгибе, а второе слагаемое — потенциальную энергию внешней сжимающей силы. Как известно:

$$V_1 = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EJ} dx = \frac{1}{2} \int_0^l EJ y''^2 dx;$$

потенциальная же энергия внешней сжимающей силы по знаку отрицательна и равна работе этой силы на перемещении (опускании) подвижного конца стержня:

$$V_2 = -Ne.$$

Величина опускания e равна разности между длиной стержня l и длиной проекции упругой кривой на направление первоначально прямолинейной оси стержня. Для определения величины e имеем дифференциальную зависимость

$$de = ds - dx = \sqrt{dx^2 + dy^2} - dx = (\sqrt{1 + y'^2} - 1) dx.$$

Разложив радикал в степенной ряд и пренебрегая степенями y' выше второй, получим

$$\sqrt{1 + y'^2} = 1 + \frac{1}{2} y'^2.$$

Отсюда следует

$$e = \frac{1}{2} \int_0^l y'^2 dx,$$

и для V_2 находим

$$V_2 = -\frac{N}{2} \int_0^l y'^2 dx.$$

Полная потенциальная энергия системы записывается так:

$$П = \frac{EJ}{2} \int_0^l y''^2 dx - \frac{N}{2} \int_0^l y'^2 dx. \quad (14)$$

При выводе выражения (14) мы пользовались только лишь геометрическими соображениями, поэтому оно сохраняет силу для всех мыслимых изогнутых состояний стержня, как равновесных, так и неравновесных, лишь бы они допускались связями системы.

Обратимся теперь к рассмотрению теорем о свойствах потенциальной энергии упругой системы. Мы будем предполагать, что система является *консервативной*, т. е. не имеет места переход механической энергии в тепловую и обратно, а также что связи системы не зависят от времени.

Теорема I. (Общая теорема равновесия)

В состоянии равновесия потенциальная энергия системы имеет экстремальное значение, т. е. достигает минимальной или максимальной величины по сравнению с неравновесными состояниями, близкими к рассматриваемому равновесному.

Для случая системы с одной степенью свободы, деформированное состояние которой определяется одной обобщенной координатой c , потенциальная энергия системы будет функцией этой координаты:

$$П = П(c).$$

Пусть значение $c=c^*$ соответствует равновесному состоянию системы. Теорема I утверждает, что $П(c^*)$ есть экстремум (минимум или максимум) по сравнению с $П(c)$, где c — произвольное значение координаты вблизи c^* .

Аналитический критерий экстремума заключается в равенстве нулю производной:

$$\frac{dП}{dc} = 0. \quad (15)$$

Для системы, деформированное состояние которой определяется при помощи n координат c_1, c_2, \dots, c_n (система с n степенями свободы), потенциальная энергия будет являться функцией этих координат:

$$П = П(c_1, c_2, \dots, c_n),$$

и условия экстремума запишутся в виде

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_1} = 0; \frac{\partial \Pi}{\partial c_2} = 0; \dots; \frac{\partial \Pi}{\partial c_n} = 0. \quad (16)$$

Анализируя выражение (14), видим, что потенциальная энергия сжатого стержня зависит от величины продольной силы N и от формы упругой кривой $y(x)$. Предположим, что форма упругой кривой задана с точностью до постоянного множителя

$$y = cf(x), \quad (17)$$

где $f(x)$ — известная функция, удовлетворяющая граничным условиям задачи.

Мы получаем таким образом систему с одной степенью свободы. Действительно, деформированное состояние стержня полностью определяется заданием величины c , которая является здесь обобщенной координатой.

Подставляя выражение (17) в формулу для потенциальной энергии (14), получаем

$$\Pi(c) = \frac{c^2}{2} \left(EJ \int_0^l f''^2 dx - N \int_0^l f'^2 dx \right). \quad (18)$$

Аналитический критерий равновесия (15) в данном случае приводит к уравнению

$$c \left(EJ \int_0^l f''^2 dx - N \int_0^l f'^2 dx \right) = 0,$$

которое позволяет найти все равновесные состояния системы.

Из полученного уравнения следует, что равновесие возможно в двух случаях:

1) $c = 0$ — стержень сохраняет прямолинейную форму, величина сжимающей силы произвольна;

2) $c \neq 0$ — стержень изгибается, величина сжимающей силы удовлетворяет условию

$$N_k = EJ \frac{\int_0^l f''^2 dx}{\int_0^l f'^2 dx}. \quad (19)$$

Эта формула определяет значение сжимающей силы N , при котором возможна криволинейная форма равновесия стержня.

Для частных случаев линейной системы равновесные состояния могут быть найдены также при помощи следующей теоремы.

Теорема II. (Частная теорема равновесия)

Если потенциальная энергия системы является однородной квадратичной функцией обобщенных координат, то в равновесном состоянии потенциальная энергия системы равна нулю.

Это положение устанавливает в указанном частном случае весьма простой аналитический критерий равновесия

$$\Pi = 0. \quad (20)$$

Для рассмотренной выше задачи равновесия сжатого стержня с учетом принятых допущений выполняются все условия, при которых может быть применена частная теорема равновесия. Легко видеть, что для этой задачи уравнение (20) приводит к тем же самым результатам, которые были получены на основе более общей теоремы I.

Частная теорема равновесия имеет весьма ограниченную область применения. Достаточно, например, включить в рассмотрение работу деформации сжатия, чтобы начало отсчета Π изменилось и теорема II потеряла свою силу. Но общая теорема равновесия сохраняет свое значение и в этом случае, так как свойство экстремума инвариантно по отношению к параллельному переносу координатных осей.

Для суждения о том, является ли рассматриваемое равновесное состояние устойчивым или нет, служит следующий энергетический критерий Лагранжа—Дирихле¹.

Теорема III. (Теорема устойчивости равновесия)

В состоянии устойчивого равновесия потенциальная энергия системы имеет минимальное значение по сравнению с неравновесными состояниями, близкими к рассматриваемому равновесному. Если потенциальная энергия достигает максимума, то равновесное состояние системы является неустойчивым.

Наличие максимума потенциальной энергии в общем случае не является необходимым условием неустойчивости равновесия. Для системы с несколькими степенями свободы потенциальная энергия в равновесном состоянии может не иметь ни минимума, ни максимума. Исключая некоторые особые частные случаи, А. М. Ляпунов доказал, что уже отсутствие минимума потенциальной энергии является признаком неустойчивости.

Для системы с одной степенью свободы состоянию неустой-

¹ Теорема сформулирована впервые Лагранжем, Lagrange, Mécanique analytique, t. I, 1788. Русский перевод: Лагранж, Аналитическая механика, т. I, ГОНТИ, 1938 (стр. 56). Строгое доказательство первой части теоремы, касающейся критерия устойчивости, дали Миндинг и Лежен Дирихле. По этому поводу см. Н. Д. Моисеев, Очерки развития теории устойчивости, Гостехиздат, 1949. Доказательство второй части теоремы (критерий неустойчивости) дал А. М. Ляпунов в труде „Общая задача об устойчивости движения“, 1892.

чивого равновесия всегда соответствует максимум потенциальной энергии¹.

Отсюда следует, что для системы с одной степенью свободы равновесие устойчиво, если

$$\frac{d^2\Pi}{dc^2} > 0,$$

и равновесие неустойчиво, если

$$\frac{d^2\Pi}{dc^2} < 0.$$

Состояние безразличного равновесия является границей между состояниями устойчивого и неустойчивого равновесия и характеризуется условием

$$\frac{d^2\Pi}{dc^2} = 0. \quad (21)$$

Полученное выражение представляет собой аналитический критерий потери устойчивости, позволяющий из всех возможных состояний равновесия системы выделить то состояние, которое является критическим.

Дифференцируя дважды по переменной c выражение для потенциальной энергии сжатого стержня (18), получаем

$$\frac{d^2\Pi}{dc^2} = EJ \int_0^l f''^2 dx - N \int_0^l f'^2 dx.$$

Применяя критерий качества равновесия, находим, что равновесие устойчиво, если

$$EJ \int_0^l f''^2 dx > N \int_0^l f'^2 dx,$$

и, наоборот, неустойчиво, если

$$EJ \int_0^l f''^2 dx < N \int_0^l f'^2 dx.$$

Значение критической силы, соответствующее состоянию безразличного равновесия стержня, получим из условия (21). Таким образом, убеждаемся, что найденное выше значение (19) сжимающей силы, при котором возможна криволинейная форма

¹ В литературе иногда это положение без специальных оговорок обобщается на случай систем с произвольным числом степеней свободы. См., например, И. Я. Штаерман и А. А. Пиковский—«Основы теории устойчивости строительных конструкций», Госстройиздат, 1939, стр. 10; Я. А. Пратусевич «Вариационные методы в строительной механике», Гостехиздат, 1948, стр. 25; Н. К. Снитко «Устойчивость стержневых систем», Госстройиздат, 1952, стр. 20.

равновесия, действительно является критическим. Полученные результаты помещены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Величина сжимающей силы	Форма равновесия	Критерий качества равновесия	Вид равновесия
$N < N_k$	Прямолинейная ($c^*=0$)	$\frac{d^2 \Pi}{dc^2} > 0$	Устойчивое
$N = N_k$	Криволинейная (c^* —произвольно)	$\frac{d^2 \Pi}{dc^2} = 0$	Безразличное
$N > N_k$	Прямолинейная ($c^*=0$)	$\frac{d^2 \Pi}{dc^2} < 0$	Неустойчивое

Подставляя значение критической силы (19) в выражение для потенциальной энергии (18), получим

$$\Pi = A (N_k - N) c^2, \quad (22)$$

где A — положительная постоянная.

Зависимость потенциальной энергии системы Π от величины отклонения (наибольшего прогиба) c и от величины сжимающей

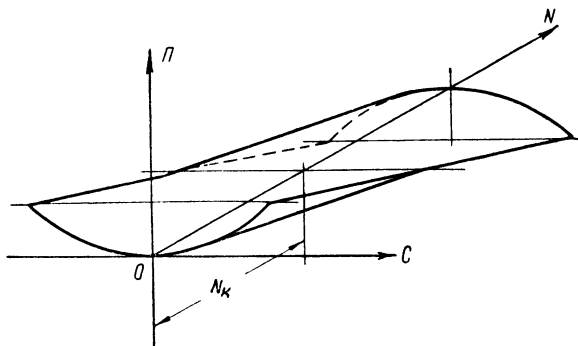


Рис. 3. Моделирующая поверхность

силы N изображается в прямоугольной системе координат поверхностью (рис. 3). При $N < N_k$ эта поверхность обращена выпуклостью вниз. Весомый шарик, положенный на любую из точек оси ON , в этой части поверхности будет находиться в состоянии устойчивого равновесия. При $N > N_k$ поверхность обращена выпуклостью вверх и весомый шарик, положенный на любую из точек оси ON , в этой части поверхности будет находиться в со-

стоянии неустойчивого равновесия. Прямая $P=0$, $N=N_k$ является границей между указанными двумя частями поверхности. Положенный на эту прямую весомый шарик будет находиться в состоянии безразличного равновесия.

Легко видеть, что характер равновесия системы полностью соответствует характеру равновесия весомого шарика на моделирующей поверхности. При помощи этой поверхности явление упругой устойчивости моделируется более простым явлением механической устойчивости положения.

Равновесные состояния стержня определяются линиями пересечения моделирующей поверхности с плоскостью $P=0$. Эти две взаимно перпендикулярные прямые линии (рис. 4) определяют для сжатого стержня три состояния равновесия:

1) устойчивое равновесие при $c^*=0$ и $N < N_k$;

2) безразличное равновесие при $N=N_k$ и произвольном значении c^* ;

3) неустойчивое равновесие при $c^*=0$ и $N > N_k$.

Для определения численного значения критической силы по формуле (19) необходимо задаться кривой изгиба $f(x)$, удовлетворяющей условиям закрепления концов стержня. Примем для шарнирно опертого стержня

$$f(x) = \sin x$$

и вычислим

$$\int_0^l f''^2 dx = \frac{\pi^4}{2l^3} ; \quad \int_0^l f'^2 dx = \frac{\pi^2}{2l} .$$

Отсюда по формуле (19) находим

$$N_k = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} .$$

Мы получили точное эйлерово значение критической силы, так как исходили из точного выражения для упругой кривой стержня при потере устойчивости. В тех случаях, когда форма упругой кривой неизвестна, уравнение (19) может служить для приближенного определения величины критической силы. Вопрос этот будет рассмотрен более подробно в дальнейшем.

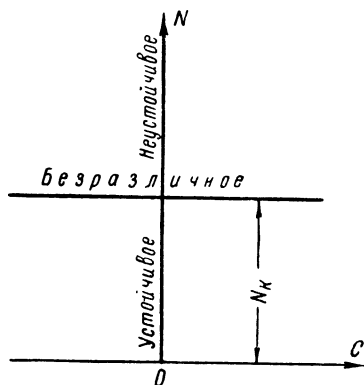


Рис. 4. Равновесные состояния сжатого стержня

§ 3. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЙ ПРИНЦИП. ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА

Произведенное в предыдущем параграфе исследование устойчивости сжатого упругого стержня при помощи теорем о свойствах потенциальной энергии оказалось весьма простым, так как форма изгиба предполагалась заданной с точностью до постоянного множителя. В общем случае, при произвольных условиях закрепления концов стержня, форма упругой кривой не может считаться заранее известной. В этом случае можно получить решение задачи на основе следующего экстремального принципа.

Теорема IV. (Теорема формы равновесия)

Форма упругой кривой, соответствующая состоянию равновесия, сообщает потенциальной энергии системы минимальное значение по сравнению с любой другой возможной кривой, проходящей через те же концевые точки.

Мы будем рассматривать теперь зависимость выражения потенциальной энергии системы

$$\Pi[y] = \frac{1}{2} \int_0^l (EJ y''^2 - N y'^2) dx \quad (23)$$

от вида функции $y=y(x)$, предполагая сжимающую силу N постоянной по величине. Теорема IV утверждает, что интересующая нас функция $y(x)$ придает выражению $\Pi[y]$ минимальное значение. Можно ли на основании этого свойства определить вид функции $y(x)$?

Вариационное исчисление дает ответ на поставленный вопрос. Следует иметь в виду, что здесь недостаточны методы разыскания обыкновенного экстремума, так как величина Π зависит не от конечного числа величин, но от всей бесконечной совокупности (континуума) значений $y(x)$ в интервале от $x=0$ до $x=l$. Такого рода определенный интеграл, величина которого зависит от вида функции, входящей в состав подинтегрального выражения, носит название *функционала*. Основные положения вариационного исчисления в применении к данному случаю гласят следующее¹.

Если кривая $y(x)$ реализует экстремум функционала

$$\Pi[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'', \dots) dx,$$

то она удовлетворяет уравнению Эйлера—Пуассона

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) - \dots = 0.$$

¹ См., например, М. А. Лаврентьев и Л. А. Люстерник, Вариационное исчисление, 1951.

В нашем случае

$$2F \doteq EJy''^2 - Ny'^2,$$

и уравнение Эйлера — Пуассона принимает вид

$$-\frac{d}{dx}(-Ny') + \frac{d^2}{dx^2}EJy'' = 0$$

или

$$EJy^{IV} + Ny'' = 0. \quad (24)$$

Это линейное однородное дифференциальное уравнение четвертого порядка представляет собой обобщение уравнения второго порядка (7) в том смысле, что оно справедливо для любого случая опорных закреплений стержня, в то время как уравнение (7) выведено в предположении шарнирного опирания концов.

Заметим, что уравнение (24) может быть составлено также и непосредственным путем, без использования свойств потенциальной энергии. В самом деле, изгибающий момент для сжатого стержня при любом способе опорного закрепления равен

$$M = Ny + Hx + M_0,$$

где H — опорная реакция, направленная перпендикулярно первоначально прямой оси стержня;

M_0 — опорный момент.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня запишется так:

$$EJy'' + Ny + Hx + M_0 = 0.$$

Для исключения величин M_0 и H дифференцируем полученное выражение дважды по аргументу x и приходим таким образом к уравнению (24). Это последнее может быть сведено к системе двух линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$EJM'' + NM = 0;$$

$$EJy'' + M = 0.$$

Таким образом, исходя из свойств потенциальной энергии, получаем для случая системы с бесконечно большим числом степеней свободы общее дифференциальное уравнение задачи. Интегрированию этого дифференциального уравнения посвящен следующий параграф.

§ 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ. РАЗЛИЧНЫЕ СЛУЧАИ ОПОРНЫХ ЗАКРЕПЛЕНИЙ

В этом параграфе мы займемся интегрированием дифференциального уравнения изогнутой оси сжатого стержня (24):

$$EJy^{IV} + Ny'' = 0$$

и рассмотрим различные случаи граничных условий.

Общим интегралом линейного дифференциального уравнения (24) при $EJ = \text{const}$ является выражение

$$y = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + C_3 x + C_4, \quad (25)$$

где попрежнему $\alpha = \sqrt{\frac{N}{EJ}}$, а постоянные C_i определяются из граничных условий¹.

Условия эти в зависимости от опорных закреплений стержня заключаются или в равенстве нулю деформаций $y=0$, $y'=0$ или в равенстве нулю усилий $Q=0$, $M=0$ в опорных сечениях стержня. На каждом конце стержня могут быть заданы два не противоречащих друг другу условия. Всего имеем, таким образом, четыре уравнения для определения четырех постоянных интегрирования. Так как

$$M = -EJy'' \text{ и } Q = M' = -EJy''',$$

то каждое из граничных условий сводится к равенству нулю на опоре прогиба или одной из трех последовательных производных этой величины.

Опорные закрепления на концах стержня должны быть выбраны так, чтобы система в целом была неизменяемой. Учитывая указанное ограничение, получаем всего пять различных комбинаций опорных устройств (табл. 2). Для каждого типа опорных закреплений в таблице указаны соответствующие граничные условия.

Если некоторая функция $y=f(x)$ соответствует одному из сочетаний граничных условий согласно табл. 2, то значения этой функции на опорах, т. е. при $x=0$ и при $x=l$, удовлетворяют следующим соотношениям:

$$f \cdot f' = 0; \quad f \cdot f''' = 0; \quad f' \cdot f'' = 0, \quad (26)$$

в чем легко можно убедиться непосредственной проверкой.

Последовательно дифференцируя выражение (25), находим

$$\begin{aligned} y' &= C_1 \alpha \cos \alpha x - C_2 \alpha \sin \alpha x + C_3; \\ y'' &= -C_1 \alpha^2 \sin \alpha x - C_2 \alpha^2 \cos \alpha x; \\ y''' &= -C_1 \alpha^3 \cos \alpha x + C_2 \alpha^3 \sin \alpha x. \end{aligned}$$

Назовем *аргументом* стержня коэффициент нулевой размерности

$$u = \alpha l = \sqrt{\frac{N}{EJ}} l \quad (27)$$

и примем начало координат на левом конце стержня. Тогда будем иметь:

¹ М. М. Филоненко-Бородич в своей работе «О некоторых свойствах дифференциального уравнения эйлеровой задачи» («Известия МВТУ» № 7, 1929) пришел к выводу, что интегральные кривые уравнений (7) и (24), давая правильное значение критической силы, «могут не удовлетворять условиям на концах стержня».

для левого конца:

$$y(0) = C_2 + C_4$$

$$y'(0) = C_1 \alpha + C_3$$

$$y''(0) = -C_2 \alpha^2$$

$$y'''(0) = -C_1 \alpha^3$$

для правого конца:

$$y(l) = C_1 \sin u + C_2 \cos u + C_3 l + C_4$$

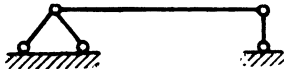
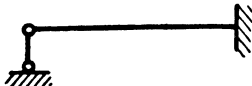
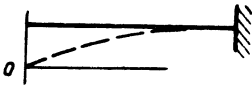
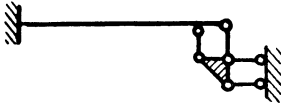
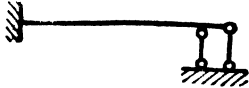
$$y'(l) = C_1 \alpha \cos u - C_2 \alpha \sin u + C_3$$

$$y''(l) = -C_1 \alpha^2 \sin u - C_2 \alpha^2 \cos u$$

$$y'''(l) = -C_1 \alpha^3 \cos u + C_2 \alpha^3 \sin u$$

Таблица 2

Схемы опорных закреплений и граничные условия на концах стержня

Схема	Левый конец	Схема стержня	Правый конец
1	$y = 0$ $y'' = 0$		$y = 0$ $y'' = 0$
2	$y = 0$ $y'' = 0$		$y = 0$ $y' = 0$
3	$y = 0$ $y'' = 0$		$y' = 0$ $y''' = 0$
4	$y = 0$ $y' = 0$		$y' = 0$ $y''' = 0$
5	$y = 0$ $y' = 0$		$y = 0$ $y' = 0$

Граничные условия дают систему четырех линейных и однородных уравнений для определения четырех постоянных C_i . В общем виде эти уравнения могут быть записаны так:

$$\left. \begin{aligned} C_1 a_{11} + C_2 a_{12} + C_3 a_{13} + C_4 a_{14} &= 0; \\ C_1 a_{21} + C_2 a_{22} + C_3 a_{23} + C_4 a_{24} &= 0; \\ C_1 a_{31} + C_2 a_{32} + C_3 a_{33} + C_4 a_{34} &= 0; \\ C_1 a_{41} + C_2 a_{42} + C_3 a_{43} + C_4 a_{44} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Здесь коэффициенты уравнений a_{ik} представляют собой в общем случае трансцендентные функции аргумента u .

Согласно общей теории линейных алгебраических уравнений неизвестное определяется по следующей формуле:

$$C_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

где Δ — главный детерминант (определитель) системы уравнений;

Δ_i — детерминант, получающийся из Δ заменой i -го столбца столбцом свободных членов.

Однако уравнения системы (28) являются однородными, т. е. свободные члены их равны нулю. Поэтому все определители Δ_i равны нулю, так как каждый из них содержит столбец равных нулю элементов. Отсюда следует, что совокупность значений

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$$

является решением системы (28). Такое решение $y(x)=0$ называется *тривиальным* и показывает, что прямолинейная форма равновесия всегда возможна.

Условием возможности существования отличных от нуля решений однородной системы (28) является равенство нулю главного детерминанта:

$$\Delta = |a_{ik}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0. \quad (29)$$

Величина детерминанта Δ зависит от аргумента u , так как элементы детерминанта являются функциями u . Корни уравнения (29), т. е. те значения аргумента u , которые обращают в нуль определитель Δ , соответствуют критическому состоянию исследуемого стержня. Наименьший положительный корень уравнения (29) определяет критическую силу для стержня

$$N_k = \frac{u^2 EJ}{l^2}. \quad (30)$$

Уравнение (29) будем называть *критерием потери устойчивости*. Заметим, что все без исключения задачи устойчивости, основанные на линейных дифференциальных уравнениях, приводят к критерию такого же вида. Корни уравнения (29) определяют те значения аргумента u , при которых возможны отличные от нуля значения постоянных C_i . Однако величина постоянных C_i остается существенно неопределенной. В следующем параграфе показано, что эти постоянные могут быть выражены через одну из них, остающуюся, однако, совершенно произвольной.

Значения u , обращающие в нуль определитель $\Delta(u)$, называются *собственными значениями*. С точки зрения математической физики задача устойчивости является поэтому частным случаем общей проблемы собственных значений. *Спектром* собственных значений называют совокупность корней уравнения $\Delta = 0$.

Перейдем к вычислению критических сил для указанных выше пяти схем опорных закреплений (табл. 2).

Первая схема (шарнирно опертый стержень) была рассмотрена ранее, и для нее была найдена критическая сила, определяемая формулой (13).

Для второй схемы опорных закреплений (один конец стержня шарнирно оперт, другой конец защемлен) на основании граничных условий, приведенных в табл. 2, критерий потери устойчивости принимает вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha^2 & 0 & 0 \\ \sin u & \cos u & l & 1 \\ \alpha \cos u & -\alpha \sin u & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\alpha^2 (\sin u - u \cos u) = 0.$$

Корень $\alpha = 0$ не отвечает случаю изгиба и поэтому должен быть отброшен. Для определения величины критической силы служит уравнение

$$\operatorname{tg} u = u. \quad (31)$$

Наименьший корень этого уравнения, вычисленный с точностью до четырех десятичных знаков, равен $u = 4,4934$. Отсюда находим величину критической силы:

$$N_k = \frac{20,1906 EJ}{l^2}. \quad (32)$$

Сравнивая полученную формулу с формулой Эйлера (13), видим, что заделка одного из концов стержня увеличивает критическую силу более чем вдвое.

Третья схема (один конец стержня свободен, другой — защемлен) требует некоторой внимательности при составлении

граничных условий. Неправильно было бы написать для свободного конца

$$Q = EJy''' = 0,$$

так как поперечная сила в этой точке не равна нулю, а равна проекции сжимающей силы на направление нормали к упругой оси стержня. Удобно принять начало координат на левом переместившемся (свободном) конце стержня и граничные условия записать так:

для левого конца

$$y = 0 \text{ и } y'' = 0$$

для правого конца

$$y' = 0 \text{ и } y''' = 0$$

На правом (защемленном) конце стержня поперечная сила равна нулю, так как нормаль к упругой кривой в опорном сечении перпендикулярна направлению сжимающей силы. Заметим, что написанные граничные условия соответствуют также таким опорным устройствам стержня: один конец оперт, а другой — защемлен, но может свободно перемещаться перпендикулярно оси стержня.

Критерий потери устойчивости $\Delta = 0$ приводит к уравнению $\cos u = 0$, наименьший положительный корень которого

$$u = \frac{\pi}{2}$$

определяет критическую силу

$$N_k = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}. \quad (33)$$

Эта сила оказывается в 4 раза меньшей, чем для случая шарнирно опертого стержня.

Рассмотрим четвертую схему опорных закреплений (один конец стержня неподвижно защемлен, другой также защемлен, но может свободно перемещаться перпендикулярно оси стержня). Само собой разумеется, что в этой схеме, так же как и в следующей, конструкция защемления на одной из опор должна обеспечивать стержню возможность свободного перемещения в продольном направлении, иначе эффект воздействия сжимающей силы не сможет проявиться.

Из условия $\Delta = 0$ получаем уравнение $\sin u = 0$. Отсюда находим $u = \pi$. Величина критической силы равна

$$N_k = \frac{\pi^2 FJ}{l^2}.$$

Рассмотренный случай с точки зрения устойчивости эквивалентен первой схеме — шарнирно опертому стержню.

Наконец, для пятой схемы (оба конца стержня защемлены) условие $\Delta = 0$ приводит к уравнению

$$\alpha(2 \cos u + u \sin u - 2) = 0,$$

наименьший отличный от нуля корень которого равен $u=2\pi$. Отсюда находим критическую силу

$$N_k = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}, \quad (34)$$

которая в 4 раза превышает критическую силу для шарнирно опертого стержня.

Как видим, условия опорных закреплений весьма резко сказываются на величине критической силы. В реальных инженерных сооружениях опорные закрепления стержней почти нигде не бывают четко выраженными (шарнир, защемление), а большей частью представляют собой упругие сопряжения с другими элементами конструкции, поэтому критическая сила для таких стержней имеет некоторое промежуточное значение.

Полученные результаты сведены в табл. 3.

§ 5. СОБСТВЕННЫЕ ФОРМЫ УПРУГОЙ КРИВОЙ. КОНГРУЭНТНОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ФОРМ. СВОБОДНАЯ ДЛИНА

Возникающие при потере устойчивости в критическом состоянии упругие кривые сжатого стержня называются *собственными формами*. Как указывалось выше, собственные формы могут быть найдены с точностью до неопределенного постоянного множителя.

При потере устойчивости шарнирно опертого стержня упругая кривая представляет собой синусоиду; при этом длина стержня соответствует полуволне синусоиды, т. е. расстоянию между двумя смежными точками перегиба.

Исследуем формы упругих кривых при других случаях опорных закреплений стержня. Будем при этом исходить из системы расчетных уравнений (28). Эти однородные уравнения позволяют определить отношения

$$\frac{C_1}{C_m}, \frac{C_2}{C_m}, \dots$$


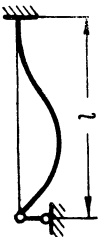



где C_m — одна из постоянных.

Выбор постоянной C_m , вообще говоря, произволен, но существует некоторое ограничение. Ограничение это заключается в том, что в качестве C_m нельзя принять постоянную, которая равна нулю при данной форме изгиба. Аналитически это условие может быть сформулировано так: субдетерминант δ_m , образованный из главного детерминанта системы вычеркиванием m -й строки и m -го столбца, должен быть отличен от нуля.

В качестве примера найдем собственную форму упругой кривой для стержня с одним шарнирно опертым и другим защемленным концом (вторая схема). Исходя из расчетных уравнений

Таблица 3

Критические силы, формы упругой кривой и свободные длины для стержней с различными условиями закрепления концов

п/п №	Схема стержня, форма упругой кривой	Уравнение упругой кривой	Критерий потери устойчивости	Наименьший корень	Критическая сила	Свободная длина
1		$y = C_1 \sin \frac{\pi x}{l}$	$\sin u = 0$	$u_K = \pi$	$N_K = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$	$l_0 = l$
2		$y = C_3 l \left(\frac{x}{l} - \sin \frac{ux}{l} \right)$, где $u = 4,4934$	$\operatorname{tg} u = u$	$u_K = 4,4934$	$N_K = \frac{20,19 EJ}{l^2}$	$l_0 = 0,699l$
3		$y = C_1 \sin \frac{\pi x}{2l}$	$\cos u = 0$	$u_K = \frac{\pi}{2}$	$N_K = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}$	$l_0 = 2l$
4		$y = C_4 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{l} \right)$	$\sin u = 0$	$u_K = \pi$	$N_K = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$	$l_0 = l$
5		$y = C_4 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right)$	$\sin \frac{u}{2} = 0$	$u_K = 2\pi$	$N_K = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}$	$l_0 = \frac{1}{2} l$

$$\left. \begin{array}{l} C_2 \\ -\alpha^2 C_2 \\ \sin u C_1 + \cos u C_2 + l C_3 \\ \alpha \cos u C_1 - \alpha \sin u C_2 + C_3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} + C_4 = 0; \\ = 0; \\ + C_4 = 0; \\ = 0 \end{array}$$

и используя критерий потери устойчивости — соотношение (31):

$$u = \operatorname{tg} u,$$

находим

$$C_2 = C_4 = 0; \quad C_1 = -\frac{l}{\sin u} C_3 = -\frac{1}{\alpha \cos u} C_3.$$

Уравнение углов поворота, находимое из уравнения упругой кривой, имеет вид

$$y' = \left(1 - u \frac{\cos \alpha x}{\sin u}\right) C_3.$$

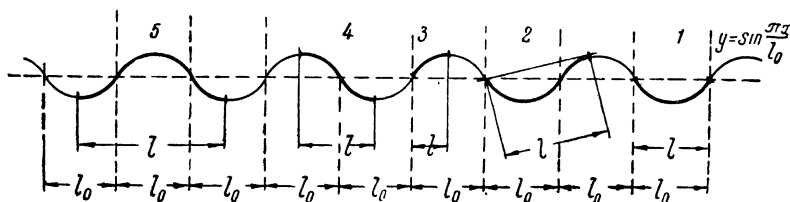


Рис. 5. Конгруэнтность собственных форм упругой кривой

Выражение для моментов получаем путем вторичного дифференцирования уравнения упругой кривой

$$M = -EJy'' = -\alpha u \frac{\sin \alpha x}{\sin u} EJC_3.$$

Таким образом, все элементы изгиба выражены через постоянную C_3 . Величина C_3 остается неопределенной по самому существу задачи.

В точке, для которой $\alpha x = \pi$, изгибающий момент равен нулю. Так как $\alpha l = 4,4934$, то точка перегиба расположена на расстоянии

$$x_1 = \frac{\pi}{4,4934} l = 0,699l$$

от левой (шарнирной) опоры.

Подобным же образом могут быть исследованы собственные формы упругой кривой и для других схем опорных закреплений.

Собственные формы для всех пяти схем однопролетного стержня могут рассматриваться как дуги одной и той же синусоиды. Для всех изображенных на рис. 5 стержней критическая сила одинакова, хотя длины стержней и условия закрепления их концов различны. Указанный факт конгруэнтности собствен-

ных форм позволяет объединить все возможные случаи опорных закреплений стержня одним выражением для критической силы

$$N_k = \frac{\pi^2 EJ}{l_0^2}, \quad (35)$$

где l_0 — *свободная* или *расчетная* длина стержня, т. е. длина шарнирно опертого стержня, эквивалентного по устойчивости рассматриваемому.

Полезно заметить также, что свободная длина l_0 представляет собой расстояние между двумя смежными точками перегиба упругой кривой стержня.

Сравнивая выражения (30) и (35), находим

$$l_0 = \beta l, \quad (36)$$

причем *коэффициент свободной длины* β определяется формулой

$$\beta = \frac{\pi}{u}, \quad (37)$$

где u — критическое значение аргумента.

Для шарнирно опертого стержня $\beta = 1$, для стержня с одним опертым и другим защемленным концом $\beta = 0,699$, для стержня с одним защемленным и другим свободным концом $\beta = 2$, для защемленного двумя концами стержня $\beta = 0,5$.

Критические силы, формы упругой кривой и свободные длины для рассмотренных случаев опорных закреплений приведены в табл. 3.

Введенное Ф. С. Ясинским¹ понятие о свободной длине сжатого стержня оказалось весьма плодотворным и лежит в основе практических методов расчета сжатых и сжато-изогнутых стержней. Конгруэнтность собственных форм упругой кривой исследовал А. Н. Крылов².

В заключение заметим, что в некоторых случаях при определении свободной длины стержня приходится принимать во внимание особые условия его работы. Рассмотрим следующий пример. На сжатый шарнирно опертый стержень воздействует поперечная нагрузка, антисимметричная относительно середины пролета. Эта нагрузка, препятствуя потере устойчивости стержня по полуволне синусоиды, создает энергетический барьер против такой деформации. Стержень может потерять устойчивость, изгибаясь по волне синусоиды с точкой перегиба в середине пролета (рис. 57). Здесь свободная длина равна $l_0 = 0,5l$, и критическая сила в 4 раза превышает эйлерово значение. Эта критическая сила является для стержня вторичной критической силой.

¹ Ф. С. Ясинский, «Бюллетень общества инженеров путей сообщения», 1892.

² А. Н. Крылов, О формах равновесия сжатых стоек, «Известия Академии наук СССР», 1931.

§ 6. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ

Интегральное уравнение устойчивости может быть построено чисто формально по известным правилам, исходя из дифференциального уравнения задачи. Другой путь, который мы предпочитаем, заключается в выводе интегрального уравнения при помощи статических соображений, непосредственно основанных на свойствах задачи.

Введем понятие о *функциях влияния*. Пусть $K_{00} = K(x, z)$ — функция влияния, определяющая прогиб стержня $y(x)$ в точке x от единичной поперечной силы $P(z)=1$ в точке z . Дифференцируя эту функцию по z , получаем новую функцию влияния

$$K_{01} = \frac{\partial K(x, z)}{\partial z},$$

которая определяет прогиб стержня $y(x)$ в точке x от единичного внешнего момента (пары сил) $M(z)=1$ в точке z .

Дифференцирование функции $K(x, z)$ по переменной (x) приводит к функции влияния

$$K_{10} = \frac{\partial K(x, z)}{\partial x},$$

определяющей угол поворота $y'(x)$ в точке x от единичной поперечной силы $P(z)=1$ в точке z .

Наконец, смешанная производная второго порядка

$$K_{11} = \frac{\partial^2 K(x, z)}{\partial x \partial y}$$

определяет угол поворота $y'(x)$ в точке x от единичного внешнего момента (пары сил) $M(z)=1$.

В принятых обозначениях первый индекс у K показывает порядок производной по x , а второй — по z . Подобным же образом можно найти, например, что функция влияния K_{20} определяет значение $y''(x)$ в точке x от единичной поперечной силы $P(z)=1$ в точке z .

Отсюда следует на основании (6), что функция влияния

$$-EJK_{20} = -EJ(z) \frac{\partial^2 K(x, z)}{\partial x^2} = M(x, z)$$

определяет изгибающий момент M в точке x от единичной поперечной силы $P(z)=1$ в точке z .

Рассмотрим элемент dz стержня, сжатого постоянной продольной силой N (рис. 6). Влияние продольной силы в точке z статически эквивалентно действию элементарного внешнего момента (пары сил):

$$d\bar{M}(z) = Ny'(z) dz,$$

следовательно:

$$y'(x) = N \int_0^l K_{11}(x, z) y'(z) dz. \quad (38)$$

Это уравнение представляет собой интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Искомой функцией является $y'(x)$; эта функция входит в левую часть, а также и в подинтегральное выражение правой части. Переменная z является вспомогательной, после интегрирования и подстановки пределов она исключается.

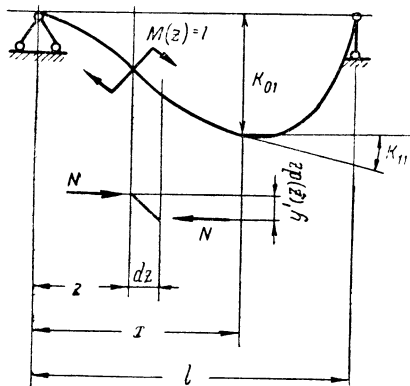


Рис. 6. К выводу интегрального уравнения устойчивости

Величина N в теории интегральных уравнений носит название *параметра*¹. Ядро интегрального уравнения $K_{11}(x, z)$ является в данном случае симметричным, так как имеет место соотношение $K_{11}(x, z) = K_{11}(z, x)$, выражающее собой принцип взаимности перемещений.

В силу однородности интегрального уравнения (38), помимо тривиального решения $y'(x) = 0$, другие решения могут

существовать только при некоторых определенных значениях параметра N , так называемых собственных значениях. Наименьшее из этих собственных значений представляет собой критическую силу стержня².

Другую форму интегрального уравнения устойчивости можно получить, если воспользоваться функцией влияния K_{01} для прогиба от единичного внешнего момента

$$y(x) = N \int_0^l K_{01}(x, z) y'(z) dz.$$

Интегрирование по частям приводит к соотношению

$$\int_0^l K_{01}(x, z) y'(z) dz = K_{01}(x, z) y(z) \Big|_{z=0}^z - \int_0^l \frac{\partial}{\partial z} K_{01}(x, z) y(z) dz.$$

Рассматривая табл. 2 граничных условий, убеждаемся, что

¹ В теории интегральных уравнений параметр принято обозначать буквой λ .

² Приведенный вывод интегрального уравнения (38) представляет собой некоторое упрощение вывода Я. Л. Нудельмана, «Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем», Гостехиздат, 1949. Менее удачен вывод Треффца (см. сноску на стр. 11). Вывод, по идее совпадающий с выводом Нудельмана, дала К. Гогенемзер в одной своей работе (К. Hohenemser—Zeitschr. für Flugtechn. Mot., 1933).

для всех случаев опорных закреплений на концах стержня или $y = 0$, или (при заделке) $y' = 0$. Для случая заделки в точке z очевидно, что $K_{01}(x, z) = 0$, так как приложенный к заделке момент не вызывает изгиба стержня. Отсюда следует, что произведение $K_{01}(x, z)y(z)$ равно нулю при $z=0$ и при $z=l$ для всех случаев опорных закреплений.

Таким образом, получаем

$$y(x) = -N \int_0^l K_{02}(x, z) y(z) dz,$$

откуда, воспользовавшись указанным выше статическим смыслом функции K_{02} , окончательно имеем¹

$$y(x) = N \int_0^l \frac{M(x, z)}{EJ(z)} y(z) dz. \quad (39)$$

Здесь $M(x, z)$ — функция влияния для момента в точке x от единичной силы $P(z)=1$ в точке z . Полученное соотношение также является линейным интегральным уравнением Фредгольма второго рода. В отличие от уравнения (38) здесь в качестве искомой функции входит прогиб $y(x)$, а не производная $y'(x)$. Другое отличие заключается в том, что для общего случая ядро $\frac{M(x, z)}{EJ(z)}$ не является симметричным.

Для шарнирно опертого стержня функция влияния $M(x, z)$ симметрична, т. е.

$$M(x, z) = M(z, x),$$

поэтому в случае постоянной жесткости стержня ядро уравнения (39) будет симметричным. В случае шарнирно опертого стержня переменной жесткости уравнение (39) может быть преобразовано в уравнение с симметричным ядром. Для этого разделим обе части уравнения (39) на $\sqrt{EJ(x)}$ и введем новую неизвестную функцию

$$\eta(x) = \frac{y(x)}{\sqrt{EJ(x)}}.$$

Полученное таким образом уравнение

$$\eta(x) = N \int_0^l \frac{M(x, z)}{\sqrt{EJ(x) EJ(z)}} \eta(z) dz \quad (40)$$

имеет симметричное ядро².

¹ С. Д. Лейтес, О применении метода сил к исследованию устойчивости статически неопределимых систем, «Исследования по теории сооружений», вып. IV, Госстройиздат, 1949.

² С. Г. Михлин, Интегральные уравнения, Гостехиздат, 1947, также 1949. В этой книге при рассмотрении устойчивости сжатого стержня автор исходит из ошибочного дифференциального уравнения изгиба, стр. 256 (1947), стр. 322 (1949).

Заметим, что дифференциальное уравнение не определяет рассматриваемую задачу полностью, поскольку для нахождения постоянных интегрирования необходимо принимать во внимание граничные или иные условия. Интегральное уравнение включает в себя граничные условия, и это обстоятельство позволяет использовать теорию интегральных уравнений как удобный аппарат для исследования общих свойств задачи.

§ 7. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Дифференциальное уравнение устойчивости допускает возможность численного решения. Сущность метода поясним на примере определения критической силы для шарнирно опертого стержня постоянной жесткости.

Разобьем длину стержня на n равных частей и обозначим через y_k ординаты упругой кривой в точках деления. Заменяя в дифференциальном уравнении (9) дифференциалы разностями, получим систему уравнений вида

$$y_{k-1} + (\omega - 2)y_k + y_{k+1} = 0, \quad (41)$$

где обозначено

$$\omega = \frac{Nl^2}{n^2 EJ}. \quad (42)$$

Система (41) совместно с граничными условиями $y_0 = y_n = 0$ приводит к критерию потери устойчивости

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} \omega - 2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & \omega - 2 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \omega - 2 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \omega - 2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \quad (43)$$

Полагая, например, $n=6$ и используя свойство симметрии системы, получаем

$$\Delta(\omega) = (\omega - 2)(\omega^2 - 4\omega + 1) = 0. \quad (44)$$

Наименьший положительный корень этого уравнения равен $\omega = 2 - \sqrt{3} = 0,2679$. Отсюда находим приближенное значение критической силы

$$N_k = \frac{6^2 \cdot 0,2679 EJ}{l^2} = \frac{9,644 EJ}{l^2},$$

которое меньше точного значения на 2%.

По мере увеличения числа участков деления точность численного решения возрастает.

Подобным же образом интегральное уравнение устойчивости является источником численных методов решения. Заменяя

определенный интеграл суммой, сводим уравнение (39) к системе линейных однородных алгебраических уравнений. Критерий потери устойчивости заключается в равенстве нулю определителя этой системы. Точность численного решения интегрального уравнения примерно соответствует точности численного решения дифференциального уравнения при одном и том же числе участков деления.

§ 8. АПРОКСИМИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ УПРУГОЙ КРИВОЙ. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД

В предшествующем параграфе был рассмотрен численный метод определения величины критической силы, основанный на замене системы с бесконечно большим числом степеней свободы системой с конечным числом степеней свободы. Эта замена свершалась путем деления длины стержня на конечное число участков, после чего дифференциальное или интегральное уравнение задачи сводилось к системе линейных однородных алгебраических уравнений.

Переход от сплошного упругого стержня к системе с конечным числом степеней свободы может быть также совершен на принципиально иной основе.

Поставим задачу аппроксимировать уравнение изогнутой оси стержня посредством n известных функций:

$$y(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x), \quad (45)$$

каждая из которых удовлетворяет граничным условиям задачи, т. е. условиям закрепления концов стержня. В этом случае деформированное состояние стержня полностью определяется заданием n числовых значений c_1, c_2, \dots, c_n .

Можно рассматривать заданные функции $f_i(x)$ как единичные векторы (орты) в координатном пространстве n измерений. Тогда значения c_i будут представлять собой координаты деформированного состояния стержня. Следовательно, посредством аппроксимирования (45) задача сводится к системе с конечным числом n степеней свободы.

Рассмотрим энергетический метод приближенного определения величины критической силы, основанный на аппроксимировании упругой кривой при помощи одной функции

$$y = cf(x), \quad (46)$$

удовлетворяющей граничным условиям задачи. В этом случае мы имеем систему с одной степенью свободы, и для определения величины критической силы достаточно на основании теоремы II (§ 2) приравнять нулю потенциальную энергию системы.

В качестве примера применения энергетического метода рассмотрим шарнирно опертый стержень постоянной жесткости. Величина критической силы определяется соотношением

$$N_k = EJ \frac{\int_0^l f''^2 dx}{\int_0^l f'^2 dx}.$$

Выше было показано, что, задаваясь точным выражением для упругой кривой

$$y = c \sin \frac{\pi x}{l},$$

мы находим точное значение критической силы.

Если принять, что изогнутая ось стержня имеет форму параболы

$$y = cx(l - x),$$

то получаем

$$\begin{aligned} \int_0^l f''^2 dx &= \int_0^l (-2)^2 dx = 4l; \\ \int_0^l f'^2 dx &= \int_0^l (l - 2x)^2 dx = \frac{l^3}{3}. \end{aligned}$$

Отсюда находим приближенное значение критической силы

$$N_k = \frac{12 EJ}{l^2}$$

с погрешностью порядка 22%.

Столь высокая погрешность объясняется тем, что аппроксимирующая функция $f(x) = x(l - x)$ весьма неточно представляет упругую кривую. Эта неточность особенно сильно сказывается в выражении второй производной $f''(x) = -2$, которое соответствует постоянству изгибающего момента по всей длине стержня, в то время как моменты на опорах должны быть равны нулю.

Точность результата может быть повышена путем более удачного выбора аппроксимирующей функции. Этой же цели можно достигнуть при помощи следующего преобразования выражения для потенциальной энергии системы. Так как для шарнирно опертого стержня имеет место условие равновесия

$$EJy'' = -Ny, \quad (47)$$

то выражение для потенциальной энергии системы (14) преобразуется в форму

$$П* = \frac{N}{2} \int_0^l \left(\frac{N}{EJ} y^2 - y'^2 \right) dx. \quad (48)$$

После внесения в общее выражение для потенциальной энергии (14) условий равновесия (47) мы получили менее общее выражение (48), которое представляет собой потенциальную энергию только для равновесных состояний шарнирно опертого стержня.

Справедливость теорем I и III для величины Π^* должна быть проверена. Несложный анализ показывает, что теорема I сохраняет свою силу. Полагая $y = c \sin \frac{\pi x}{l}$, находим по формуле (48)

$$\Pi^* = -A^*(N_k - N)c^2,$$

где A^* — положительная постоянная.

Сравнение с выражением (22) для Π приводит к выводу, что для неравновесных состояний величина Π^* имеет обратный знак по сравнению с потенциальной энергией Π^1 .

Отсюда следует, что для Π^* теорема III меняет свой смысл на обратный. Такое нарушение общности вносит значительное неудобство, поэтому использование выражения Π^* оправдывается в некоторой степени лишь практическими выгодами. Заметим, что теорема III применяется главным образом для разыскания условий безразличного равновесия на основе критерия (21). Легко видеть, что этот критерий сохраняет свою силу и для Π^* .

Аппроксимируя упругую кривую при помощи (46) и используя условие теоремы II

$$\Pi^* = 0,$$

получаем для шарнирно опертого стержня постоянной жесткости

$$N_k = EJ \frac{\int_0^l f'^2 dx}{\int_0^l f^2 dx}. \quad (49)$$

Сравнение формул (19) и (49) убеждает, что вторая формула гораздо более удобна для приближенного вычисления критической силы, так как требует лишь достаточно точного аппроксимирования упругой кривой $y(x)$ и первой производной $y'(x)$. Формула (19) основана на выражениях для $y'(x)$ и $y''(x)$, следовательно, предъявляет к аппроксимирующей функции более строгие требования.

Рассмотрим некоторые примеры применения формулы (49), основанные на аппроксимировании упругой кривой простейшими функциями.

¹ На это обстоятельство, не замеченное С. П. Тимошенко и другими авторами, обратил внимание П. Ф. Дроздов («Вестник инженеров и техников», № 2, 1951).

а) Квадратная парабола

$$y = cx(l - x).$$

Вычисляем

$$\int_0^l f^2 dx = \int_0^l (lx - x^2) dx = \frac{l^3}{30};$$

$$\int_0^l f'^2 dx = \int_0^l (l - 2x)^2 dx = \frac{l^3}{3},$$

следовательно:

$$N_k = 10 \frac{EJ}{l^3}.$$

Погрешность составляет 1,3% вместо 22% в случае применения формулы (19).

б) Кривая третьего порядка

$$y = c(3l^2x - 4x^3) \quad \left(x \leq \frac{l}{2}\right).$$

Эта кривая представляет изогнутую ось балки от сосредоточенной силы в середине пролета. Уравнение справедливо только при $x \leq \frac{l}{2}$, поэтому пределы интегрирования следует принять от 0 до $\frac{l}{2}$. Находим

$$\int_0^{\frac{l}{2}} (3l^2x - 4x^3)^2 dx = \frac{17}{70} l^7;$$

$$\int_0^{\frac{l}{2}} (3l^2 - 12x^2)^2 dx = \frac{12}{5} l^5,$$

следовательно:

$$N_k = \frac{168}{17} \cdot \frac{EJ}{l^2} = 9,882 \frac{EJ}{l^2}.$$

Погрешность составляет 0,12%.

в) Кривая четвертого порядка

$$y = c(l^3x - 2lx^3 + x^4).$$

Такой вид имеет уравнение упругой кривой для балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой.

Вычисления дают

$$\int_0^l (l^3 x - 2lx^3 + x^4)^2 dx = \frac{31}{630} l^9;$$

$$\int_0^l (l^3 - 6lx^2 + 4x^3)^2 dx = \frac{17}{35} l^7.$$

Отсюда находим

$$N_k = \frac{306}{31} \cdot \frac{EJ}{l^2} = 9,8710 \frac{EJ}{l^2}.$$

Погрешность составляет всего 0,01%.

Некоторые соображения о точности решения, достигаемой в энергетическом методе, а также о выборе аппроксимирующей функции даны в следующем параграфе.

§ 9. МЕТОД РИТЦА. МЕТОД БУБНОВА — ГАЛЕРКИНА

Переходим теперь к рассмотрению приближенных методов решения задач устойчивости, основанных на аппроксимировании уравнения упругой кривой при помощи нескольких функций. Широкое распространение имеет метод Ритца, опирающийся на свойства потенциальной энергии упругой системы. Метод Ритца вплотную примыкает к задаче вариационного исчисления о разыскании вида функции $y(x)$, реализующей экстремум функционала — потенциальной энергии системы

$$П[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', \dots) dx.$$

Предположим, что искомая функция $y(x)$ представлена в виде бесконечного ряда

$$y(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) + \dots,$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$ — система функций, обладающих необходимыми условиями для того, чтобы аппроксимировать искомую функцию;

c_1 , c_2 — коэффициенты, численная величина которых должна быть соответствующим образом подобрана.

Подставляя выражение для y в формулу для потенциальной энергии и произведя интегрирование, получаем $П$ как функцию величин c_1 , c_2 , ..., т. е. $П = П(c_1, c_2, c_3, \dots)$.

На основании теоремы IV функция Π для равновесного состояния должна иметь минимальное значение. Условия экстремума

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

дают уравнения для определения c_i . Таким образом, задача вариационного исчисления о разыскании вида функции, реализующей экстремум функционала, сведена к задаче нахождения экстремума для функции бесконечно большого числа переменных c_i .

Метод Ритца основывается на аппроксимировании искомой функции $y(x)$ при помощи *конечного* числа известных функций (45)

$$y(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x),$$

каждая из которых должна удовлетворять граничным условиям задачи. Подставляя выражение для y в формулу для потенциальной энергии и используя условия экстремума

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n), \quad (50)$$

получаем систему уравнений, служащих для определения c_i .

В случае, если $F(x, y, y', y'', \dots) = F[y, y']$ представляет собой квадратичную форму относительно y, y', y'', \dots , а это как раз имеет место при тех допущениях, которые обычно принимаются при решении задач устойчивости, то $\Pi = \Pi(c_1, c_2, \dots, c_n)$ будет также квадратичной формой относительно c_i . Тогда условия (50) приводят к системе n линейных и однородных уравнений:

$$\begin{aligned} c_1 a_{11} + c_2 a_{12} + \dots + c_n a_{1n} &= 0; \\ c_1 a_{21} + c_2 a_{22} + \dots + c_n a_{2n} &= 0; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots & \\ c_1 a_{n1} + c_2 a_{n2} + \dots + c_n a_{nn} &= 0, \end{aligned}$$

где коэффициенты Ритца равны

$$a_{ik} = \int_0^l F[f_i, f_k] dx. \quad (51)$$

Подынтегральная функция $F[f_i, f_k]$ представляет собой билинейную форму, соответствующую исходной квадратичной форме $F[y, y']$.

Критерий потери устойчивости будет заключаться в равенстве нулю главного детерминанта системы уравнений

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0; \quad (52)$$

ибо только при $\Delta = 0$ возможны отличные от нуля значения постоянных c_i . Величина постоянных c_i остается неопределенной, но можно найти отношения между ними и тем самым с точностью до произвольного постоянного множителя определить форму изогнутой оси стержня.

Другую, более элементарную трактовку метода Ритца можно получить, если заметить, что при помощи аппроксимирования (45) задача сводится к системе с конечным числом n степеней свободы. Применяя теорему I, сразу получаем условия (50).

Исходя из выражения (14) для потенциальной энергии системы, находим общую формулу для коэффициентов Ритца

$$a_{ik} = \int_0^l (EJ f_i'' f_k'' - N f_i' f_k') dx. \quad (53)$$

Для шарнирно опертого стержня целесообразно использовать выражение (48); тогда коэффициенты Ритца равны

$$a_{ik} = \int_0^l \left(\frac{N}{EJ} f_i f_k - f_i' f_k' \right) dx. \quad (54)$$

Замечаем, что определитель (52) симметричен, т. е. его элементы удовлетворяют принципу взаимности

$$a_{ik} = a_{ki}.$$

В случае, если упругая кривая аппроксимируется при помощи всего одной функции (46), применение метода Ритца приводит к простейшим формулам (18) и (49) энергетического метода. Очень часто в качестве аппроксимирующих функций выбирают те из членов ряда Фурье

$$\begin{aligned} & \cos \frac{\pi x}{l}; \cos \frac{2\pi x}{l}; \cos \frac{3\pi x}{l}, \dots; \\ & \sin \frac{\pi x}{l}; \sin \frac{2\pi x}{l}; \sin \frac{3\pi x}{l}, \dots, \end{aligned}$$

которые удовлетворяют граничным условиям задачи и ожидаемой форме изгиба, но можно использовать также и алгебраические полиномы.

В качестве примера использования алгебраических полиномов найдем критическую силу для шарнирно опертого стержня постоянной жесткости. Упругую кривую будем аппроксимировать при помощи суммы полиномов второй и третьей степеней:

$$y = c_1(lx - x^2) + c_2(3l^2x - 4x^3) \quad \left(x \leq \frac{l}{2}\right).$$

Имеем

$$\begin{aligned} f_1 &= lx - x^2; & f_1' &= l - 2x; \\ f_2 &= 3l^2x - 4x^3; & f_2' &= 3l^2 - 12x^2. \end{aligned}$$

Воспользуемся формулой (54); интегрируя в пределах от 0 до $\frac{l}{2}$ и обозначая

$$u = \sqrt{\frac{N}{EJ}} l, \quad (27)$$

находим

$$a_{11} = \int_0^{\frac{l}{2}} \left[\frac{N}{EJ} (lx - x^2)^2 - (l - 2x)^2 \right] dx = \left(\frac{u^2}{60} - \frac{1}{6} \right) l^3;$$

$$a_{12} = \int_0^{\frac{l}{2}} \left[\frac{N}{EJ} (lx - x^2)(3l^2x - 4x^3) - (l - 2x)(3l^2 - 12x^2) \right] dx = \\ = \left(\frac{61u^2}{960} - \frac{5}{8} \right) l^4;$$

$$a_{22} = \int_0^{\frac{l}{2}} \left[\frac{N}{EJ} (3l^2x - 4x^3)^2 - (3l^2 - 12x^2)^2 \right] dx = \left(\frac{17u^2}{70} - \frac{12}{5} \right) l^5.$$

Критерий потери устойчивости имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{u^2}{60} - \frac{1}{6} & \frac{61u^2}{960} - \frac{5}{8} \\ \frac{61u^2}{960} - \frac{5}{8} & \frac{17u^2}{70} - \frac{12}{5} \end{vmatrix} = 0,$$

откуда, раскрывая определитель, приходим к квадратному уравнению относительно u^2

$$65 u^4 - 6768 u^2 + 60480 = 0.$$

Наименьший корень этого уравнения $u^2 = 9,872$, следовательно, приближенное значение критической силы равно

$$N_k = \frac{9,872 EJ}{l^2}.$$

Погрешность равна 0,02%.

Известны различные видоизменения метода Ритца, которые, однако, не вносят ничего принципиально нового.

Очень близок к методу Ритца по своему содержанию метод Бубнова — Галеркина, основанный не на выражении для потенциальной энергии системы, а на дифференциальном уравнении задачи (см. стр 10).

Пусть дифференциальное уравнение задачи имеет вид

$$L[y] = L(x, y, y', y'', \dots) = 0, \quad (55)$$

где L — дифференциальный оператор.

Как и в случае применения метода Ритца, аппроксимируем искомую функцию $y(x)$ при помощи ряда (45). Понимая под $L[y]$ результат подстановки в дифференциальное уравнение (55) принятого выражения для y (45), имеем по методу Бубнова — Галеркина систему уравнений для определения c_i :

$$\int_0^l L[y] f_i(x) dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (56)$$

Если дифференциальное уравнение задачи линейно и однородно относительно y, y', y'' , то в развернутой форме эти уравнения образуют линейную и однородную систему:

$$\begin{aligned} c_1 a_{11} + c_2 a_{12} + \dots + c_n a_{1n} &= 0; \\ c_1 a_{21} + c_2 a_{22} + \dots + c_n a_{2n} &= 0; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots; \\ c_1 a_{n1} + c_2 a_{n2} + \dots + c_n a_{nn} &= 0. \end{aligned}$$

Коэффициенты этой системы выражаются общей формулой

$$a_{ik} = \int_0^l f_i L[f_k] dx, \quad (57)$$

где $L[f_k]$ означает результат подстановки функции f_k вместо y в исходное дифференциальное уравнение (55).

Критерий потери устойчивости заключается в равенстве нулю определителя системы и имеет ту же форму (52), что и для метода Ритца. Разница заключается в способе образования элементов a_{ik} определителя. В отличие от метода Ритца коэффициенты a_{ik} в методе Бубнова — Галеркина не обладают в общем случае свойством взаимности, т. е. $a_{ik} \neq a_{ki}$.

Исходя из общего дифференциального уравнения нашей задачи (24)

$$L[y] = EJy^{IV} + Ny'' = 0,$$

получаем для коэффициентов Бубнова — Галеркина

$$a_{ik} = \int_0^l (EJ f_k^{IV} + N f_k'') f_i dx. \quad (58)$$

Интегрирование по частям

$$\int_0^l f_k'' f_i dx = [f_k' f_i]_0^l - \int_0^l f_k' f_i' dx$$

с использованием свойств граничных условий (26) позволяет представить коэффициенты Бубнова — Галеркина в виде

$$a_{ik} = \int_0^l (EJ f_k^{IV} f_i - N f_k' f_i) dx. \quad (59)$$

Наконец, если $EJ = \text{const}$, то и первый интеграл может быть преобразован повторным интегрированием по частям, и мы получаем формулу для a_{ik} , совпадающую в этом частном случае с выражением (53) в методе Ритца.

Исходя из дифференциального уравнения для шарнирно опертого стержня (7), можно получить более простое выражение для коэффициентов Бубнова — Галеркина:

$$a_{ik} = \int_0^l (EJ f_k'' - N f_k') f_i dx. \quad (60)$$

В случае постоянной жесткости стержня простое преобразование приводит эту формулу к виду (54).

Точность метода Бубнова—Галеркина соответствует точности метода Ритца, и оба метода можно считать равноценными. Точность результата зависит от того, насколько хорошо известна форма изгиба стержня и насколько удачно для нее подобрана система аппроксимирующих функций. Заметим, что по сути дела требуется не только, чтобы аппроксимирующая функция $f(x)$ хорошо соответствовала кривой $y(x)$, но и чтобы производные $f'(x)$, $f''(x)$ хорошо представляли $y'(x)$, $y''(x)$, ... Поэтому формула (54), не содержащая производных высокого порядка, при одних и тех же аппроксимирующих функциях, дает более точный результат, чем формула (53).

Энергетический метод, методы Ритца и Бубнова—Галеркина объединяются общей идеей аппроксимирования уравнения упругой кривой стержня, благодаря чему задача сводится к исследованию системы с конечным числом степеней свободы. С точки зрения статической аппроксимирование эквивалентно наложению на стержень некоторых дополнительных связей, препятствующих его свободной деформации. Наложение дополнительных связей увеличивает устойчивость системы, поэтому приближенные методы, основанные на аппроксимировании упругой кривой, дают всегда преувеличенное значение критической силы.

При удачном выборе аппроксимирующих функций $f_i(x)$ приближенные методы дают достаточно точные результаты и требуют сравнительно небольшой затраты вычислительного труда. Выбирая функции $f_i(x)$, следует особенно остерегаться внесения чуждых данной задаче граничных условий. Можно рекомендовать в качестве аппроксимирующих функций принимать уравнения упругой кривой при изгибе исследуемого стержня некоторой поперечной нагрузкой, иначе говоря, интегралы дифференциального уравнения изгиба

$$EJ f^{IV}(x) = q(x),$$

удовлетворяющие граничным условиям задачи. Здесь $q(x)$ — некоторая поперечная нагрузка на стержень.

§ 10. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ. СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДОВ

Идея метода последовательных приближений заключается в том, что на основе какого-либо приближенного решения задачи находится следующее, более точное приближение. Этот процесс, называемый процессом *итерации*, продолжается до тех пор, пока не будет достигнута требуемая степень точности.

Предложенный Вианелло¹ в специальной графоаналитической форме метод итерации допускает, однако, более широкую трактовку. Изложим основное содержание метода, ограничиваясь рассмотрением шарнирно опертого стержня.

Соотношение $M = Ny$ указывает на наличие пропорциональности между ординатами эпюры моментов и ординатами упругой кривой. Предположим, что мы задались некоторой формой упругой кривой так, что все ординаты ее выражаются в долях от наибольшей ординаты в середине пролета y_{\max} , которая по величине остается произвольной. Пользуясь соотношением $M = Ny$, можно построить эпюру моментов, имеющую неопределенный множитель Ny_{\max} . Полученная эпюра моментов позволяет вычислить элементы кривой при помощи одного из известных приемов строительной механики. Если между ординатами полученной таким образом упругой кривой $\bar{y}(x)$ имеет место то же самое соотношение, что и в исходной кривой $y(x)$, т. е. если формы кривых совпадают, то величина критической силы определяется из сравнения максимальных ординат y_{\max} и \bar{y}_{\max} .

В самом деле, если в интегральном уравнении (39) положить $x = \frac{l}{2}$ и $y(x) = y\left(\frac{l}{2}\right) = y_{\max}$, то получим для

критической силы

$$N_k = \frac{y_{\max}}{\int_0^l \frac{M\left(\frac{l}{2}, z\right)y(z)}{EJ(z)} dz}. \quad (61)$$

Интеграл в знаменателе представляет собой прогиб в середине пролета стержня при сжимающей силе $N=1$ и при форме изгиба $y = (x)$. Формула (61) дает вполне точный результат, если формы изгиба $\bar{y}(x)$ и $y(x)$ совпадают.

Если же упругие кривые $y(x)$ и \bar{y} недостаточно близки по форме друг к другу, необходимо построить новую эпюру моментов $\bar{M} = N\bar{y}$ и найти второе приближение — упругую кривую

¹ См. сноску на стр. 11.

Сравнение методов определения критической силы

Метод	Достоинства	Недостатки	Рекомендуется применять в случаях
Аналитический метод Интегрирование дифференциального уравнения	1. Точность результата 2. Малая трудоемкость вычислений	1. Возможность применения только в ряде частных случаев	Если дифференциальное уравнение интегрируется в квадратурах
Численный метод Численное решение дифференциального или интегрального уравнения	1. Точность результата 2. Универсальная применимость	1. Большая трудоемкость вычислений	Если аналитическое решение невозможно, а метод аппроксимирования дает недостаточную точность
Метод аппроксимирования 1. Энергетический метод 2. Метод Рунге 3. Метод Бунцова—Галеркина	1. Малая трудоемкость вычислений 2. Универсальная применимость	1. Опасность искажения результата в случае неудачного выбора аппроксимирующих функций 2. Трудность оценки точности результата	Если аналитическое решение невозможно и аппроксимирование упругой кривой не встречает затруднений
Метод итерации Метод последовательного приближения	1. Универсальная применимость 2. Автоматическая корректировка вычислительных ошибок	1. Большая трудоемкость вычислений 2. Недостаточная точность результата	Не рекомендуется

$y(x)$. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будет получено с достаточной точностью соответствие между двумя последовательными формами упругой кривой. Величина критической силы находится из сравнения наибольших ординат этих двух последовательных форм упругой кривой.

Метод итерации уступает численным методам решения по объему вычислительной работы и по точности результата.

Сравнение различных методов позволяет сделать следующие выводы. Во всех тех случаях, когда дифференциальное уравнение задачи интегрируется в замкнутой форме или сводится к квадратурам, аналитическое решение ведет к цели наиболее быстро и дает наиболее точный результат. При невозможности аналитического решения следует применять численный метод или метод аппроксимации. Метод итерации не может быть рекомендован.

Некоторые данные, относящиеся к достоинствам и недостаткам рассмотренных методов, приведены в табл. 4.

УПРУГИЙ СЖАТО-ИЗОГНУТЫЙ СТЕРЖЕНЬ

§ 11. СЖАТО-ИЗОГНУТЫЙ СТЕРЖЕНЬ. МОДЕЛЬ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ЗАДАЧИ

Предположим, что на стержень, помимо продольной сжимающей силы, действует некоторая поперечная нагрузка, вызывающая появление изгибающих моментов. Эта поперечная нагрузка может быть распределенной или же состоять из сосредоточенных сил и внешних моментов (пар сил). Такой стержень будем называть сжато-изогнутым.

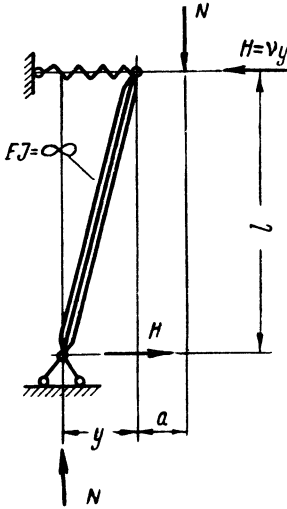


Рис. 7. Модель упругого сжато-изогнутого стержня

Для бесконечно жесткого стержня деформации изгиба не имеют места, и продольная сжимающая сила не оказывает никакого влияния на величину

Для бесконечно жесткого стержня деформации изгиба не имеют места, и продольная сжимающая сила не оказывает никакого влияния на величину

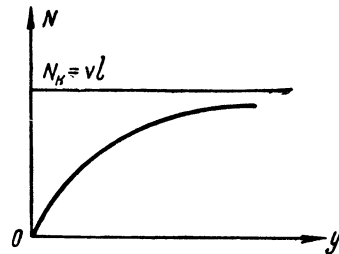


Рис. 8. Зависимость между отклонением и сжимающей силой для модели

изгибающих моментов. Стержень конечной жесткости испытывает деформацию изгиба. Поэтому в таком стержне возникают дополнительные моменты, равные произведению продольной сжимающей силы на ординату упругой кривой. Следовательно, для определения величины изгибающих моментов необходимо знать деформацию изгиба стержня. Обычный путь расчета, при котором сначала определяется величина действующих на стержень

изгибающих моментов, а затем по этим изгибающим моментам вычисляется деформация изгиба, здесь невозможен.

Рассматриваемая задача характеризуется также той особенностью, что к ней неприменим принцип независимости действия сил в его обычной трактовке. При совместном действии поперечной нагрузки и сжимающей силы в стержне возникают изгибающие моменты и деформации изгиба, по своей величине превосходящие моменты и деформации, вызываемые одной только поперечной нагрузкой.

Для того чтобы лучше выяснить сущность изучаемого явления, обратимся, как и в первой главе, к рассмотрению модели. Бесконечно жесткий стержень нижним концом шарнирно закреплён, а на верхнем конце имеет упруго-смещающую опору. Стержень нагружен продольной сжимающей силой N , которая приложена с эксцентриситетом a (рис. 7).

Условие равновесия системы имеет вид

$$N(a + y) - Hl = 0,$$

где y — смещение верхнего конца стержня;

H — реакция опоры.

Если ν — коэффициент упругости опоры, то в силу соотношения $H = \nu y$ получаем

$$y = \frac{Na}{\nu l - N}. \quad (1)$$

На рис. 8 представлен график зависимости прогиба y от величины продольной сжимающей силы N . Зависимость эта — нелинейная. По мере приближения величины сжимающей силы к критическому значению

$$N_k = \nu l \quad (2)$$

прогиб неограниченно возрастает; в пределе, при $N = N_k$, прогиб становится равным бесконечности. Кривая $N(y)$ имеет прямую $N = N_k$ своей асимптотой.

Если бы на верхний конец стержня действовал только внешний момент $M = Na$, то прогиб стержня был бы равен

$$y_0 = \frac{Na}{\nu l}.$$

Отсюда следует, что формула (1) может быть представлена в виде

$$y = y_0 \frac{1}{1 - \frac{N}{N_k}}. \quad (3)$$

Влияние сжимающей силы N увеличивает деформацию. Это увеличение оценивается множителем

$$\omega = \frac{1}{1 - \frac{N}{N_k}}, \quad (4)$$

который больше единицы.

Для изучения равновесного соотношения сжато-изогнутого стержня необходимо обратиться к рассмотрению дифференциального уравнения изгиба, которое имеет вид

$$EJy^{IV} + Ny'' = q(x). \quad (5)$$

Это уравнение основывается на тех же самых допущениях (гипотеза плоских сечений, малость деформаций, изгиб в плоскости действия нагрузки, пренебрежение продольными деформациями, абсолютная упругость материала), которые были приняты при выводе однородного дифференциального уравнения устойчивости центрально сжатого стержня

$$EJy^{IV} + Ny'' = 0. \quad (6)$$

В отличие от уравнения (6) линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка (5) не является однородным вследствие наличия члена $q(x)$. Согласно теории линейных дифференциальных уравнений общий интеграл уравнения (5) может быть представлен в виде

$$y = y_0 + Y, \quad (7)$$

где y_0 — общее решение однородного уравнения (6);

Y — любое частное решение полного уравнения (5).

Определение постоянных интегрирования из граничных условий задачи (условий закрепления концов стержня) приводит к системе линейных уравнений, которые в силу наличия поперечной нагрузки $q(x)$ не являются однородными, т. е. по крайней мере одно из этих уравнений имеет правую часть, отличную от нуля. В случае, если главный определитель этой системы отличен от нуля, постоянные интегрирования определяются однозначно, тем самым однозначно определяются и все элементы изгиба стержня. Следовательно, если сжимающая сила меньше критической, существует только одна единственная форма равновесия упругого сжато-изогнутого стержня, соответствующая заданным нагрузкам. По мере приближения величины сжимающей силы к критическому значению N_k прогиб неограниченно возрастает и при $N = N_k$ становится формально равным бесконечности. Этот результат указывает лишь на то, что наше решение, основанное на предположении о малости деформаций, становится непригодным.

Деформации изгиба при $N \geq N_k$ могут быть найдены, если исходить из точного выражения для кривизны изогнутого

стержня; получающееся при этом дифференциальное уравнение не является уже линейным и интегрирование его значительно сложнее, чем интегрирование уравнения (5).

В этой главе мы будем всегда предполагать, что сжимающая сила по своей величине меньше критической, и равновесное состояние сжато-изогнутого стержня может быть с достаточной степенью точности определено путем интегрирования линейного уравнения (5).

Отметим некоторые свойства уравнения (5), являющиеся общими для всех линейных дифференциальных уравнений. Если y_1 является решением уравнения

$$EJy^{IV} + Ny'' = q_1(x),$$

а y_2 — решением уравнения

$$EJy^{IV} + Ny'' = q_2(x),$$

то выражение

$$y = y_1 + y_2$$

будет решением уравнения

$$EJy^{IV} + Ny'' = q_1(x) + q_2(x).$$

Отсюда следует также, что уравнение

$$EJy^{IV} + Ny'' = kq_1(x),$$

где k — постоянная, будет иметь решение

$$y = ky_1;$$

следовательно, закон наложения сохраняет свое значение по отношению к нагрузке $q(x)$. Если ограничить понятие нагрузки, понимая под последней только лишь поперечную нагрузку $q(x)$, а сжимающую силу N рассматривать не как нагрузку, а как некоторое свойство системы, то к сжато-изогнутому стержню можно применить принцип независимости действия сил. Эта возможность основывается на факте линейности исходного дифференциального уравнения задачи.

Обозначая

$$\alpha = \sqrt{\frac{N}{EJ}}, \quad (8)$$

можем записать общий интеграл однородного уравнения (6) в виде (см. главу первую)

$$y_0 = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + C_3 x + C_4,$$

а частный интеграл полного уравнения (5) определить в зависимости от вида функции $q(x)$. В простейшем, наиболее часто

встречающемся случае, когда закон изменения нагрузки изображается при помощи полинома степени m

$$q(x) = ax^m + bx^{m-1} + \dots + k,$$

частное решение уравнения (5) может быть представлено в виде полинома той же степени

$$Y = Ax^m + Bx^{m-1} + \dots + K.$$

Здесь постоянные A, B, \dots, K подбираются таким образом, чтобы тождественно удовлетворить уравнению (5).

Этих указаний достаточно для решения простых задач. Некоторые, чисто вычислительные затруднения возникают лишь в том случае, когда функция $q(x)$ разрывна на длине стержня, т. е. если в состав нагрузки входят сосредоточенные силы и пары сил. В этом случае всегда возможно разбить длину стержня на некоторое число участков, внутри каждого из которых закон изменения нагрузки изображается непрерывной функцией $q(x)$. При этом, помимо граничных условий, приходится включать в рассмотрение также условия сопряжения на границах упомянутых участков. Так как существует бесчисленное множество частных решений уравнения (5), то можно поставить вопрос о таком особом подборе формы частного решения, при котором выкладки упрощаются.

Следует отметить, что при решении задачи равновесия сжато-изогнутого стержня часто весьма целесообразно бывает исходить из дифференциального уравнения изгиба второго порядка

$$EIy'' + M = 0.$$

Обозначим через M изгибающий момент в стержне от одной только поперечной нагрузки $q(x)$, без учета влияния сжимающей силы N , т. е. изгибающий момент в стержне при бесконечно большой жесткости последнего. Имеем

$$M = Ny + M.$$

Отсюда при постоянной жесткости EI стержня получаем линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + \alpha^2 y = f(x), \quad (9)$$

где обозначено

$$f(x) = -\frac{M}{EI}. \quad (10)$$

Дифференциальное уравнение (9) обладает всеми теми же свойствами, что и уравнение (5). Общий интеграл уравнения (9) можно представить в виде

$$y = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + Y, \quad (11)$$

где Y — любое частное решение уравнения (9).

В следующем параграфе рассматриваются простейшие частные случаи изгиба сжато-изогнутого однопролетного стержня.

§ 12. ПРОГИБЫ И МОМЕНТЫ СЖАТО-ИЗОГНУТОГО СТЕРЖНЯ

Шарнирно опертый двумя концами стержень сжимается силой N и изгибается поперечной нагрузкой P , приложенной в середине пролета (рис. 9, а). Момент от одной только поперечной нагрузки

$$M = \frac{1}{2} Px \left(x \leq \frac{l}{2} \right).$$

Следовательно, дифференциальное уравнение изгиба имеет вид

$$y'' + \alpha^2 y = -\frac{P}{2EI} x.$$

Ищем частное решение в виде

$$Y = Ax.$$

Путем подстановки в дифференциальное уравнение находим

$$A = -\frac{P}{2N},$$

следовательно, общим интегралом будет

$$y = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x - \frac{P}{2N} x.$$

Граничные условия: 1) прогиб на опоре равен нулю $y(0) = 0$; 2) касательная к упругой оси стержня в точке $x = \frac{l}{2}$

горизонтальна, т. е. $y'\left(\frac{l}{2}\right) = 0$. Используя эти условия, находим

$$C_1 = \frac{P}{2N} \cdot \frac{1}{\alpha \cos \frac{\alpha l}{2}}, \quad C_2 = 0.$$

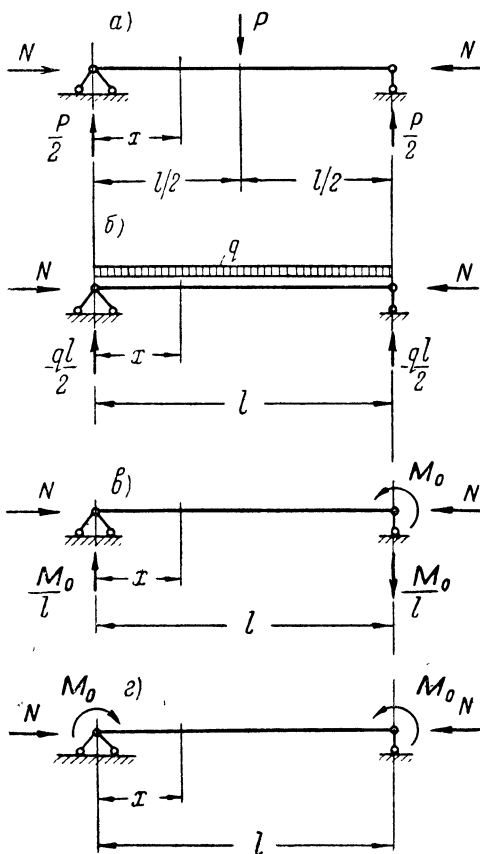


Рис. 9. Сжато-изогнутые шарнирно опертые стержни

Упругая ось стержня определяется выражением

$$y = \frac{P}{2N} \left(\frac{\sin \alpha x}{\alpha \cos \frac{\alpha l}{2}} - x \right) \left(x \leq \frac{l}{2} \right).$$

Максимальный прогиб в середине пролета находим, полагая $x = \frac{l}{2}$:

$$y_{\max} = \frac{P}{2N} \left(\frac{\sin \frac{\alpha l}{2}}{\alpha \cos \frac{\alpha l}{2}} - \frac{l}{2} \right).$$

Назовем *аргументом* стержня параметр нулевой размерности

$$u = \alpha l = \sqrt{\frac{N}{EJ}} l, \quad (12)$$

тогда максимальный прогиб выразится так:

$$y_{\max} = \frac{Pl^3}{48 EJ} \cdot \frac{3}{\left(\frac{u}{2}\right)^2} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{u}{2}}{\frac{u}{2}} - 1 \right).$$

Замечаем, что $\frac{Pl^3}{48 EJ}$ представляет собой максимальный прогиб в середине пролета от одной только поперечной нагрузки, без учета влияния продольной сжимающей силы. Выражение для моментов имеет вид

$$M = \frac{Pl}{4} \cdot \frac{\sin \alpha x}{\frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}} \left(x \leq \frac{l}{2} \right),$$

откуда для максимального момента находим

$$M_{\max} = \frac{Pl}{4} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{u}{2}}{\frac{u}{2}}.$$

Если обозначить

$$\left. \begin{aligned} \omega_1(u) &= \frac{3}{\left(\frac{u}{2}\right)^2} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{u}{2}}{\frac{u}{2}} - 1 \right), \\ \psi_1(u) &= \frac{\operatorname{tg} \frac{u}{2}}{\frac{u}{2}}, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

то максимальный прогиб и максимальный момент можно представить в виде

$$\begin{aligned} y_{\max} &= \bar{y}_{\max} \omega_1(u); \\ M_{\max} &= M_{\max} \psi_1(u), \end{aligned}$$

где \bar{y}_{\max} и M_{\max} — соответственно прогиб и момент от одной только поперечной нагрузки при отсутствии сжимающей силы.

Числовые множители ω_1 и ψ_1 являются функциями аргумента u . Исследуем характер этих функций. При $u=0$ (что соответствует случаю отсутствия сжимающей силы) получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, раскрывая которую одним из известных методов, находим

$$\omega_1(0) = \psi_1(0) = 1.$$

При возрастании аргумента u от 0 до π функции ω_1 и ψ_1 монотонно возрастают. Легко видеть, что

$$\lim_{u \rightarrow \pi} \omega_1(u) = \lim_{u \rightarrow \pi} \psi_1(u) = \infty.$$

Следовательно, прогиб y_{\max} и момент M_{\max} неограниченно возрастают по мере приближения величины сжимающей силы к критическому значению

$$N_k = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$

Таким образом, вышеприведенные выкладки можно рассматривать как косвенный вывод формулы Эйлера.

Графики функций $\omega_1(u)$ и $\psi_1(u)$ изображены на рис. 10.

Для случая равномерно распределенной нагрузки q , действующей на сжатый силой N шарнирно опертый стержень (рис. 9,б), имеем

$$M = \frac{ql}{2} x - \frac{q}{2} x^2.$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (9) и определяя постоянные из граничных условий, находим максимальный прогиб в середине пролета

$$y_{\max} = \frac{5ql^4}{384EJ} \cdot \frac{12}{5 \left(\frac{u}{2}\right)^4} \left[\frac{2}{\cos \frac{u}{2}} - \left(\frac{u}{2}\right)^2 - 2 \right].$$

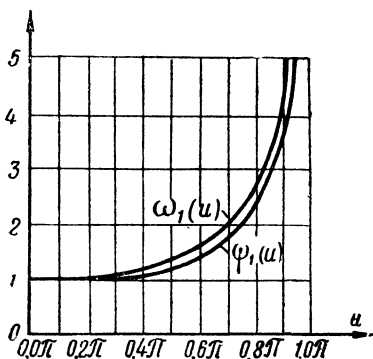


Рис. 10. Графики функций $\omega_1 u$ и $\psi_1(u)$

Максимальный момент в середине пролета равен

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{2}{\left(\frac{u}{2}\right)^2} \left(\frac{1}{\cos \frac{u}{2}} - 1 \right).$$

Итак, максимальный прогиб и максимальный момент, имеющие место в середине пролета, можно представить в виде

$$y_{\max} = \bar{y}_{\max} \omega_2(u);$$

$$M_{\max} = M_{\max} \psi_2(u),$$

где \bar{y}_{\max} и M_{\max} — соответственно прогиб и момент от одной только поперечной нагрузки, а множители $\omega_2(u)$ и $\psi_2(u)$ являются функциями аргумента u

$$\left. \begin{aligned} \omega_2(u) &= \frac{12}{5 \left(\frac{u}{2}\right)^4} \left[\frac{2}{\cos \frac{u}{2}} - \left(\frac{u}{2}\right)^2 - 2 \right], \\ \psi_2(u) &= \frac{2}{\left(\frac{u}{2}\right)^2} \left(\frac{1}{\cos \frac{u}{2}} - 1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Пара сил (момент) M_0 , приложенная к правому опорному сечению стержня (рис. 9, в), вызывает прогиб в середине пролета, равный

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{M_0 l^2}{16 EJ} \cdot \frac{2}{\left(\frac{u}{2}\right)^2} \left(\frac{1}{\cos \frac{u}{2}} - 1 \right).$$

Момент в середине пролета будет

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{2} M_0 \frac{1}{\cos \frac{u}{2}}.$$

В отличие от первых двух случаев нагрузки прогиб в середине пролета от опорной пары M_o не является наибольшим.

В случае действия на стержень двух равных моментов, приложенных к обоим опорным сечениям и изгибающих стержень в одну и ту же сторону (рис. 9,з), уравнение упругой кривой может быть получено путем наложения упругой кривой от правого момента и упругой кривой от левого момента.

Максимальный прогиб в середине пролета получается равным

$$y_{\max} = \frac{M_o l^2}{8 EJ} \cdot \frac{2}{\left(\frac{u}{2}\right)^2} \left(\frac{1}{\cos \frac{u}{2}} - 1 \right).$$

Выражение для максимального момента в середине пролета имеет вид

$$M_{\max} = M_o \frac{1}{\cos \frac{u}{2}}.$$

Следовательно, и в этом случае имеем

$$\begin{aligned} y_{\max} &= \bar{y}_{\max} \omega_3(u); \\ M_{\max} &= M_{\max} \psi_3(u), \end{aligned}$$

где

$$\bar{y}_{\max} = \frac{M_o l^2}{8 E I}; \quad M_{\max} = M_o,$$

а множители ω_3 и ψ_3 определяются при помощи формул

$$\left. \begin{aligned} \omega_3(u) &= \frac{2}{\left(\frac{u}{2}\right)^2} \left(\frac{1}{\cos \frac{u}{2}} - 1 \right); \\ \psi_3(u) &= \frac{1}{\cos \frac{u}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Замечаем попутно, что $\omega_3(u) = \psi_3(u)$.

Рассмотренный случай нагрузки является случаем внецентренно сжатого стержня. Пусть к опорным сечениям стержня сжимающая сила N приложена с некоторым эксцентриситетом a , тогда

$$M_o = Na,$$

и все выведенные выше формулы сохраняют свою силу.

Рассмотрим стержень с зашечленными концами и. Само собой разумеется, что одна из опор предполагается подвижной в направлении длины стержня, иначе эффект воздействия продольной сжимающей силы на стержень не сможет проявиться.

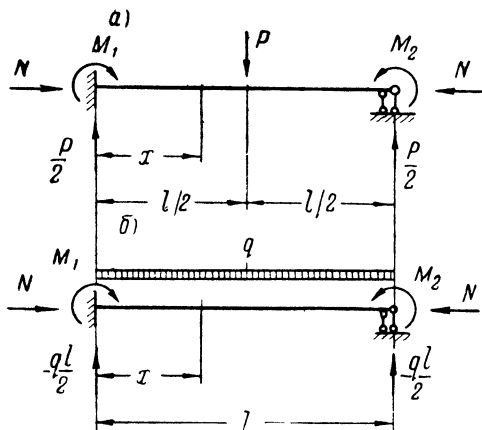


Рис. 11. Сжато-изогнутые зашечленные двумя концами стержни

Пусть, например, на стержень действует сосредоточенная сила P , приложенная в середине пролета (рис. 11,а). В силу симметрии системы и нагрузки заключаем, что опорные моменты должны быть равны между собой.

Решение задачи проще всего получить путем наложения упругих кривых от силы P и от опорных моментов $M_1=M_2$. Оба эти случая нагрузки в отдельности были рассмотрены выше.

Опуская простые выкладки, дадим окончательный результат.

Максимальный прогиб, имеющий место в середине пролета, равен

$$y_{\max} = \frac{Pl^3}{192 EJ} 3 \frac{\operatorname{tg} \frac{u}{4} - \frac{u}{4}}{\left(\frac{u}{4}\right)^3} = \bar{y}_{\max} \omega_4(u) \quad (16)$$

Опорный момент равен

$$M_1 = -\frac{Pl}{8} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{u}{4}}{\frac{u}{4}} = M_1 \psi_4(u). \quad (17)$$

Для момента в середине пролета стержня находим

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Pl}{8} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{u}{4}}{\frac{u}{4}} = M\left(\frac{l}{2}\right) \psi_4(u).$$

Отсюда следует, что момент в середине пролета равен по абсолютной величине опорному моменту при всех значениях аргумента u .

Для другого часто встречающегося случая равномерно распределенной нагрузки q (рис. 11,б) решение также может быть без затруднений получено путем наложения уравнений упругой кривой для шарнирно опертого стержня от равномерно распределенной нагрузки q и от опорных моментов $M_1=M_2$.

Величина опорного момента выражается формулой

$$M_1 = -\frac{ql^2}{12} \cdot \frac{3}{\left(\frac{u}{2}\right)^2} \left(1 - \frac{u}{2} \operatorname{ctg} \frac{u}{2}\right) = M_1 \bar{\psi}_5(u). \quad (18)$$

Максимальный прогиб в середине пролета равен

$$y_{\max} = \frac{ql^4}{384 EJ} \cdot \frac{3}{\left(\frac{u}{4}\right)^2} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{u}{4}}{\frac{u}{4}} - 1\right) = \bar{y}_{\max} \omega_5(u), \quad (19)$$

причем мы замечаем, что

$$\omega_5(u) = \omega_4(u)$$

Момент в середине пролета равен

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql^2}{24} \cdot \frac{6}{\left(\frac{u}{2}\right)^2} \left(\frac{\frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} - 1\right) = M\left(\frac{l}{2}\right) \psi_5(u). \quad (20)$$

Исследуем теперь изгиб консоли, т. е. стержня с одним защемленным и другим свободным концом. Примем во внимание, что консоль в некоторых случаях нагрузки деформируется, как половина шарнирно опертого стержня, и воспользуемся результатами полученного выше решения.

Так, в случае приложения сосредоточенной силы P на конце консоли (рис. 12,а) получаем на основе формул (13) для максимального момента в заделке

$$M_{\max} = -Pl \frac{\operatorname{tg} u}{u} = M_{\max} \psi_6(u) \quad (21)$$

и для прогиба на конце консоли

$$y_{\max} = \frac{Pl^3}{3EJ} \cdot \frac{3}{u^2} \left(\frac{\operatorname{tg} u}{u} - 1\right) = \bar{y}_{\max} \omega_6(u). \quad (22)$$

Если консоль загружена равномерно распределенной нагрузкой q (рис. 12,б), то воспользоваться решением для шарнирно опертого стержня нельзя.

Путем интегрирования дифференциального уравнения задачи находим прогиб на конце консоли:

$$y_{\max} = \frac{ql^4}{8EJ} \cdot \frac{8}{u^4} \left(1 + u \operatorname{tg} u - \frac{1}{\cos u} - \frac{u^2}{2}\right) = \bar{y}_{\max} \omega_7(u). \quad (23)$$

Максимальный момент в заделке равен

$$M_{\max} = -\frac{ql^2}{2} \cdot \frac{2}{u^2} \left(1 + u \operatorname{tg} u - \frac{1}{\cos u} \right) = M_{\max} \psi_7(u). \quad (24)$$

Для случая момента M_0 на конце консоли (рис. 12, в) возможно воспользоваться решением для шарнирно опертого стержня. Используя формулы (15), сразу получаем для прогиба на конце консоли:

$$y_{\max} = \frac{M_0 l^2}{2EJ} \cdot \frac{2}{u^2} \left(\frac{1}{\cos u} - 1 \right) = \bar{y}_{\max} \omega_8(u) \quad (25)$$

и для максимального момента в заделке

$$M_{\max} = -M_0 \frac{1}{\cos u} = M_{\max} \psi_8(u). \quad (26)$$

§ 13. ОБОБЩЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ. ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА

Для сжато-изогнутого стержня при любом способе опорных закреплений и при любом типе поперечной нагрузки получаем соотношения

$$\left. \begin{aligned} y &= \bar{y} \omega(u); \\ M &= \bar{M} \psi(u), \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

где $y(M)$ — прогиб (момент) в некоторой фиксированной точке стержня;

$y(M)$ — прогиб (момент) в той же точке от одной только поперечной нагрузки, т. е. без учета влияния продольной сжимающей силы.

Вид функций $\omega(u)$ или $\psi(u)$ зависит от характера опорных закреплений стержня, от типа нагрузки, а также и от выбора точки, прогиб или момент в которой рассматривается.

Аналитические выражения для функций $\omega(u)$ и $\psi(u)$, соответствующих максимальным прогибам и моментам шарнирно опертого стержня, защемленного обоими концами стержня и консоли, приведены в § 12.

Функции $\omega(u)$ и $\psi(u)$ обладают следующими свойствами:

1) при $u=0$ функции $\omega(u)$ и $\psi(u)$ принимают значение

$$\omega(0) = \psi(0) = 1;$$

2) при некотором критическом значении аргумента $u = u_k$ функции ω и ψ обращаются в бесконечность:

$$\lim_{u \rightarrow u_k} \omega(u) = \lim_{u \rightarrow u_k} \psi(u) = \infty;$$

3) в интервале $0 < u < u_k$ функции ω и ψ однозначны, непрерывны и монотонно возрастают.

При этом важно заметить, что критическому значению аргумента u_k соответствует критическая сила для данного стержня

$$N_k = \frac{u_k^2 EJ}{l^2}.$$

Для шарнирно опертого стержня $u_k = \pi$, для защемленного обоими концами $u_k = 2\pi$, для консоли $u_k = \frac{\pi}{2}$ и т. д.

Характерные особенности работы сжато-изогнутого упругого стержня очень наглядно выясняются на основе изучения зависимости между деформациями стержня и величиной внешней нагрузки. При изучении этой зависимости мы будем предполагать, что сжимающая сила и поперечная нагрузка на стержень возрастают одновременно и притом таким образом, что отношение между ними остается постоянным. Если, например, помимо сжимающей силы N на стержень воздействует некоторая поперечная нагрузка P , то, положив

$$P = \xi N,$$

мы должны считать ξ постоянным числом во всех стадиях работы стержня.

В качестве меры деформированного состояния стержня можно принять его наибольший прогиб. Рассмотрим внецентренно сжатый шарнирно опертый стержень. Используем формулы для стержня, нагруженного на опорах равными моментами M_0 . Полагая $M_0 = Na$, находим для наибольшего прогиба

$$y_{\max} = a \left(\frac{1}{\cos \frac{u}{2}} - 1 \right). \quad (28)$$

Согласно сказанному выше, мы должны здесь рассматривать эксцентриситет приложения сжимающей силы a как величину постоянную, не зависящую от u . В этом случае величина опорных моментов будет всегда находится в постоянном отношении к величине сжимающей силы. Если известны геометрические размеры поперечного сечения стержня, то величина сжимающей силы находится по данному значению аргумента u при помощи формулы

$$N = \frac{u^2 EJ}{l^2}.$$

Задаваясь рядом значений u и вычисляя соответствующие значения y_{\max} и N , можно построить график зависимости двух последних величин (рис. 13). Рассматривая график, замечаем, что каждому значению $N < N_k$ соответствует одно единственное значение y_{\max} и, наоборот, каждому значению y_{\max} соответствует единственное значение N . Следовательно, при $N < N_k$ равновесие является устойчивым, однако по мере приближения величины N к критическому значению N_k прогиб y_{\max} неограниченно возрастает и при $N = N_k$ формально становится равным бесконечности. Кривая $N(y_{\max})$ имеет своей асимптотой прямую $N = N_k$.

Указанные особенности являются общими для всех упругих сжато-изогнутых стержней при любом характере опорных закреплений и при любой нагрузке, вызывающей прогиб одного знака. Поэтому можно сформулировать следующие положения.

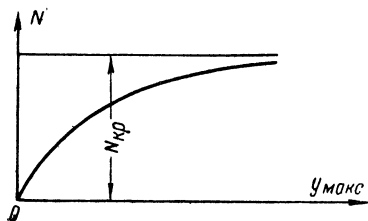


Рис. 13. Зависимость между прогибом и сжимающей силой для сжато-изогнутого стержня

1. Каждому значению сжимающей силы N , если только оно меньше критического значения N_k , соответствует одно единственное деформированное состояние упругого сжато-изогнутого стержня.

2. По мере приближения величины сжимающей силы N к критическому значению N_k деформации упругого сжато-изогнутого стержня неограниченно возрастают. Отсюда следует, что упругий сжато-изогнутый стержень не испытывает явления потери устойчивости. Мы говорим поэтому об изгибе сжато-изогнутого стержня. Однако изгиб этот отличается той особенностью, что при конечном значении параметров нагрузки (случай $N = N_k$) возникают бесконечно большие деформации стержня. При значении же $N > N_k$ равновесие вообще невозможно.

Очевидно, что с точки зрения строительной практики возникновение хотя бы и конечных, но больших деформаций элементов сооружения означает в большинстве случаев выход элемента из работы и создает опасность для всего сооружения в целом. Поэтому при проектировании сжато-изогнутого стержня необходимо предусмотреть достаточные коэффициенты запаса, с тем чтобы фактически действующая сжимающая сила не могла приблизиться к критическому значению. Сложность проблемы усугубляется тем обстоятельством, что применяемые в строительной практике материалы не являются абсолютно упругими, поэтому сформулированные выше положения, основанные на неограниченной применимости закона Гука, подлежат еще пересмотру (см. главы третью и четвертую).

Приближенный расчет упругого сжато-изогнутого стержня основан на аппроксимировании трансцендентных функций $\omega(u)$ и $\psi(u)$ при помощи простых аналитических выражений. Для шарнирно опертого стержня с достаточной степенью точности можно принять

$$\omega = \frac{1}{1-n}. \quad (29)$$

где

$$n = \frac{N}{N_k} = \left(\frac{u}{\pi}\right)^2. \quad (30)$$

При любой симметричной относительно середины пролета нагрузке имеем

$$y_{\max} = \bar{y}_{\max} \frac{1}{1-n}. \quad (31)$$

Для максимального момента в середине пролета можно написать

$$M_{\max} = M_{\max} + N y_{\max} = M_{\max} \left[1 + \frac{\bar{N} y_{\max}}{M_{\max}} \omega(u) \right],$$

причем M_{\max} есть момент в середине пролета от одной только поперечной нагрузки, без учета влияния сжимающей силы. Заметим, что имеет место равенство

$$\frac{N \bar{y}_{\max}}{M_{\max}} = \nu u^2,$$

где ν — числовой коэффициент, постоянный для данного типа нагрузки.

Так, например, для случая сосредоточенной силы в середине пролета находим

$$\frac{N \bar{y}_{\max}}{M_{\max}} = u^2 \frac{EJ}{l^2} \cdot \frac{Pl^3}{48 EJ} \cdot \frac{4}{Pl} = \frac{1}{12} u^2,$$

следовательно:

$$\nu_1 = \frac{1}{12}.$$

Для равномерно распределенной нагрузки

$$\nu_2 = \frac{5}{48};$$

в случае двух равных опорных моментов

$$\nu_3 = \frac{1}{8}.$$

Таким образом, момент в середине пролета равен

$$M_{\max} = M_{\max} [1 + \nu u^2 \omega(u)],$$

откуда следует точная зависимость, связывающая функции $\psi(u)$ и $\omega(u)$ для одного и того же типа нагрузки:

$$\psi(u) = 1 + \nu u^2 \omega(u). \quad (32)$$

Если теперь воспользоваться приближенным выражением для $\omega(u)$, то найдем

$$\psi(u) = \frac{1 + \mu n}{1 - n}, \quad (33)$$

где

$$\mu = \nu \pi^2 - 1 \quad (34)$$

есть величина постоянная для данного типа нагрузки. Для рассмотренных трех схем нагрузки соответственно имеем:

$$\mu_1 = \frac{\pi^2}{12} - 1 = -0,18;$$

$$\mu_2 = \frac{5\pi^2}{48} - 1 = +0,03;$$

$$\mu_3 = \frac{\pi^2}{8} - 1 = +0,23.$$

Итак, величина максимального момента определяется выражением

$$M_{\max} = M_{\max} \frac{1 + \mu n}{1 - n}, \quad (35)$$

причем эта формула, так же как и формула (31), сохраняет свое значение и для случая растягивающей силы, если только величине n приписывать отрицательное значение.

Если значение n невелико, то можно пойти на дальнейшее упрощение, принимая $\mu = 0$ и вычисля максимальный момент по формуле

$$M_{\max} = M_{\max} \frac{1}{1 - n}. \quad (36)$$

§ 14. СПЕЦИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ. МЕТОД НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Настоящий параграф посвящен изучению специальных приемов интегрирования дифференциального уравнения сжато-изогнутого стержня (5) в случае постоянной жесткости стержня. В этом случае при обозначении (8) упомянутое дифференциальное уравнение принимает вид

$$y^{IV} + \alpha y'' = \frac{q(x)}{EJ}. \quad (37)$$

Как уже указывалось, разыскание общего решения этого

уравнения не представляет принципиальных затруднений. Однако определение постоянных интегрирования в некоторых случаях ведет к громоздким выкладкам, в особенности тогда, когда функция нагрузки $q(x)$ выражается различными аналитическими законами на различных участках длины стержня. В этом случае приходится разбивать длину стержня на ряд участков таким образом, чтобы внутри каждого участка функция $q(x)$ выражалась одним аналитическим законом. Для каждого из таких участков разыскивается общее решение уравнения (37), содержащее четыре постоянные интегрирования. Таким образом, если m — число участков, то общее число постоянных интегрирования составляет $4m$. Для их определения служат четыре граничных условия на концах стержня и $4(m-1)$ условий сопряжения в точках, разграничивающих участки.

Такой путь действий является громоздким и требует кропотливой и утомительной работы. Отсюда возникает необходимость разработки специальных методов интегрирования дифференциального уравнения (37).

Наиболее совершенный из таких методов был предложен И. Г. Бубновым и применен им при исследовании сжато-изогнутых и растянуто-изогнутых стержней¹. Широкое распространение в Советском Союзе этот метод получил благодаря А. Н. Крылову, наглядно показавшему эффективность метода в применении к расчету балок на упругом основании². Метод успешно используется также и в динамике сооружений.

Изложим основную идею этого метода, названного методом *начальных параметров*, в применении к уравнению (37).

Будем искать общее решение уравнения (37) в виде

$$y = y_0 + Y,$$

где y_0 — общее решение однородного уравнения;

$$y^{IV} + \alpha^2 y'' = 0;$$

Y — некоторое частное решение полного уравнения (37).

Общее решение однородного уравнения является суммой четырех линейно независимых частных решений

$$y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4$$

и содержат четыре постоянные интегрирования. Частными решениями являются (см. главу первую)

$$y_1 = \sin \alpha x;$$

$$y_2 = \cos \alpha x;$$

$$y_3 = x;$$

$$y_4 = 1.$$

¹ И. Г. Бубнов, Строительная механика корабля, т. I, 1912.

² А. Н. Крылов, О расчете балок, лежащих на упругом основании, изд. Академии наук СССР, 1931.

Однако можно составить новую систему решений

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \eta_3, \quad \eta_4$$

при помощи линейного преобразования

$$\eta_1 = b_{11} y_1 + b_{12} y_2 + b_{13} y_3 + b_{14} y_4;$$

$$\eta_2 = b_{21} y_1 + b_{22} y_2 + \dots;$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

Здесь b_{ik} — постоянные, выбор которых произволен. Единственное ограничение ставится требованием линейной независимости системы новых решений η . Требование это удовлетворено, если определитель линейного преобразования отличен от нуля:

$$|b_{ik}| \neq 0.$$

Напишем систему частных решений $\eta(x)$ так, чтобы удовлетворялись условия Коши:

$$\eta_1(0) = 1; \quad \eta_1'(0) = 0; \quad \eta_1''(0) = 0; \quad \eta_1'''(0) = 0;$$

$$\eta_2(0) = 0; \quad \eta_2'(0) = 1; \quad \eta_2''(0) = 0; \quad \eta_2'''(0) = 0;$$

$$\eta_3(0) = 0; \quad \eta_3'(0) = 0; \quad \eta_3''(0) = 1; \quad \eta_3'''(0) = 0;$$

$$\eta_4(0) = 0; \quad \eta_4'(0) = 0; \quad \eta_4''(0) = 0; \quad \eta_4'''(0) = 1.$$

Требуется, следовательно, чтобы функции $\eta(x)$ и их первые три производные принимали определенные численные значения в точке $x=0$. Из этих условий можно найти все элементы b_{ik} матрицы линейного преобразования. Выполняя эти несложные выкладки, находим

$$\left. \begin{aligned} \eta_1(x) &= 1; \\ \eta_2(x) &= x; \\ \eta_3(x) &= \frac{1 - \cos \alpha x}{\alpha^2}; \\ \eta_4(x) &= \frac{\alpha x - \sin \alpha x}{\alpha^3}. \end{aligned} \right\}. \quad (38)$$

Следовательно, общий интеграл однородного уравнения записывается так:

$$y_0 = C_1 + C_2 x + C_3 \frac{1 - \cos \alpha x}{\alpha^2} + C_4 \frac{\alpha x - \sin \alpha x}{\alpha^3}. \quad (39)$$

Решения (38) образуют так называемую фундаментальную систему.

Частное решение Y должно быть выбрано специальным образом. Эта цель может быть достигнута применением метода

Лагранжа вариации постоянных. Произведя необходимые выкладки, получим

$$Y = \frac{1}{\alpha^3 EJ} \int_0^x [\alpha(x-z) - \sin \alpha(x-z)] q(z) dz. \quad (40)$$

Тот же самый результат можно получить, если доказать, что частным решением является интеграл

$$Y = \int_0^x \eta_4(x-z) \frac{q(z)}{EJ} dz. \quad (41)$$

где $\eta_4(x-z)$ означает результат подстановки $x-z$ вместо аргумента x в последнюю (четвертую) функцию фундаментальной системы (38).

Итак, общий интеграл дифференциального уравнения (37) на основании полученных результатов имеет вид

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 \frac{1 - \cos \alpha x}{\alpha^2} + C_4 \frac{\alpha x - \sin \alpha x}{\alpha^3} + \\ + \frac{1}{\alpha^3 EJ} \int_0^x [\alpha(x-z) - \sin \alpha(x-z)] q(z) dz \quad (42)$$

Выясним преимущества, связанные с этой формой решения. Прежде всего мы получили решение в общем виде для любого закона изменения поперечной нагрузки $q(x)$, так как относительно функции $q(x)$ мы не делали никаких ограничительных предположений. Если функция $q(x)$ определяется в интервале $0 < x < l$ различными аналитическими законами, то интеграл (40) следует вычислять путем разбиения интервала интегрирования на ряд участков

$$\int_0^x \dots dz = \int_0^{x_1} \dots dz + \int_{x_1}^{x_2} \dots dz + \dots + \int_{x_k}^x \dots dz,$$

внутри каждого из которых функция $q(x)$ выражается одним аналитическим законом.

Следовательно, интеграл $Y(x)$ будет иметь в этом случае различные выражения для разных участков стержня, но эти выражения непрерывным образом переходят одно в другое в точках, разделяющих участки длины стержня. Точно так же и первая производная $Y'(x)$ непрерывна в этих точках. Вторая производная $Y''(x)$ непрерывна во всех точках длины стержня за исключением тех точек, в которых приложен внешний момент (пара сил) M . Третья производная $Y'''(x)$ непрерывна во всех точках, за исключением тех точек, в которых приложена внешняя сила P , перпендикулярная оси стержня. В двух последних случаях

величина разрыва производных $Y''(x)$ или $Y'''(x)$ соответствует величине внешней нагрузки M или \bar{P} .

Таким образом, условия сопряжения соблюдены для члена $Y(x)$. Так как постоянные C_i сохраняют свое значение по всей длине стержня, то, следовательно, условия сопряжения выполнены для функции $Y(x)$, выраженной в форме (42), в целом.

Далее, непосредственным вычислением легко убедиться, что член $Y(x)$ и его первые три производные обращаются в нуль при значении $x=0$, т. е.

$$Y(0) = 0; \quad Y'(0) = 0; \quad Y''(0) = 0 \text{ и } Y'''(0) = 0;$$

но так как граничные условия на конце стержня всегда задаются в виде равенства нулю двух из величин

$$y; y'; \quad M = -EJy''; \quad Q = -EJy''',$$

то мы приходим к важному выводу, что член $Y(x)$ не входит в соотношения, выражающие граничные условия при $x=0$.

Следовательно, две из четырех постоянных интегрирования C_i могут быть сразу найдены по условиям опорных закреплений при $x=0$ вне зависимости от характера нагрузки на стержень, что дает значительное упрощение по сравнению с обычным методом.

Благодаря выбору фундаментальной системы решений, удовлетворяющей условиям Коши, определение этих двух постоянных производится особенно просто. В самом деле, постоянные C_i имеют следующие значения:

$$C_1 = y(0); \quad C_2 = y'(0); \quad C_3 = y''(0); \quad C_4 = y'''(0) \quad (43)$$

и представляют собой, таким образом, *элементы изгиба стержня в начале координат* (начальные параметры). Этим обстоятельством и объясняется название метода, которое, впрочем, нам кажется не особенно удачным, так как это название не указывает на особенности метода, связанные с выбором вида частного решения $Y(x)$.

Граничные условия при $x=0$ обычно ставятся так, что из значений y и первых трех производных y' , y'' и y''' два значения равны нулю. Отсюда на основании (43) заключаем, что из четырех постоянных C_i две равны нулю.

Например, для случая шарнирного опирания при $x=0$ имеем $C_1=C_3=0$; для случая защемления в этой точке $C_1=C_2=0$ и т. д. Возможные случаи опорных устройств и связанные с ними формы граничных условий были рассмотрены ранее (см. главу первую), поэтому здесь нет нужды на этом останавливаться.

Две другие постоянные интегрирования определяются из граничных условий на втором конце стержня при $x=l$. Здесь уже приходится решать систему двух уравнений с двумя неизвестными, а при составлении этих уравнений учитывать также член $Y(x)$.

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЙ СЖАТО-ИЗОГНУТЫЙ СТЕРЖЕНЬ

§ 15. ИДЕАЛЬНЫЙ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ. ТРИ СТАДИИ РАБОТЫ

Линейная зависимость между напряжением σ и относительным удлинением ε , устанавливаемая законом Гука, для строительных сталей имеет место только при напряжениях, не превосходящих предела пропорциональности σ_n . График $\sigma(\varepsilon)$ зависимость напряжений от относительных удлинений для строительных сталей будет нами подробно рассмотрен в следующей главе. Сейчас важно отметить наличие на этом графике так называемой *площадки текучести*, которая характеризуется ростом деформации при почти постоянном значении напряжения. В этом случае говорят о *пластической* работе материала. Напряжение, соответствующее пластической работе материала, называется *пределом текучести* и обозначается σ_T .

Сложный характер зависимости между деформациями и напряжениями, изображаемый графиком $\sigma(\varepsilon)$, заставляет исследователя вступить на путь идеализации этого графика путем замены фактической кривой $\sigma(\varepsilon)$ некоторой упрощенной схемой. Гипотеза Гука, предполагающая абсолютно упругую работу материала, представляет собой первую попытку такого рода идеализации. Так как это предположение оказалось недостаточным для отображения работы стальных конструкций, то потребовалась новая гипотеза, несколько более полно отвечающая фактической зависимости между удлинениями и напряжениями. Этой цели в известной мере отвечает гипотеза идеального упруго-пластического материала, для которого зависимость $\sigma(\varepsilon)$ изображается графиком, представленным на рис. 14. Кривая зависимости $\sigma(\varepsilon)$ представляет собой отрезок прямой, исходящий из начала координат и наклоненный к оси $O\varepsilon$ под углом $\theta = \arctg E$; этот отрезок смыкается с прямой, параллельной оси $O\varepsilon$, в точке с координатами $(\varepsilon_T, \sigma_T)$. Приблизительное очертание фактической кривой $\sigma(\varepsilon)$ для мягкой, так называемой пластической стали показано на графике (рис. 14) пунктиром.

Таким образом, гипотеза идеального упруго-пластического материала устанавливает две области работы материала:

- а) область упругих деформаций при $\sigma < \sigma_T$, $\varepsilon < \varepsilon_T$;
 б) область пластических деформаций при $\sigma = \sigma_T$, $\varepsilon \geq \varepsilon_T$.

Настоящая глава посвящена исследованию устойчивости сжатого и сжато-изогнутого стержня, материал которого в своей работе следует этой гипотезе. Такие стержни мы будем называть в дальнейшем упруго-пластическими. Вопрос о применимости полученных результатов для расчета стальных стержней будет рассмотрен в следующей главе.

В основу исследования положены следующие предпосылки:

- 1) материал полностью следует в своей работе графику (рис. 14), причем σ_T и ε_T считаются одинаковыми по абсолютной величине как для случая растяжения, так и для случая сжатия;
- 2) при изгибе все плоские сечения остаются плоскими (гипотеза Бернулли);
- 3) влияние разгрузки и повторной нагрузки не учитывается;
- 4) плоскость изгиба предполагается совпадающей с плоскостью действия нагрузки.

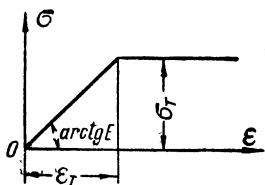


Рис. 14. График $\sigma(\varepsilon)$ для упруго-пластического материала

В первую очередь должен быть установлен предел применимости формулы Эйлера. Формула Эйлера, выведенная в предположении абсолютно упругой работы материала, дает величину критической силы для шарнирно опертого центрального сжатого стержня.

$$N_k = \frac{\pi^2 EJ}{l^2},$$

где EJ — постоянная по всей длине l жесткость стержня.

Критическое осевое напряжение, или, короче, критическое напряжение выражается формулой

$$\sigma_k = \frac{N_k}{F} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (1)$$

где λ — гибкость стержня,

$$\lambda = \frac{l}{i}, \quad (2)$$

равная отношению длины стержня l к радиусу инерции поперечного сечения $i = \sqrt{\frac{J}{F}}$.

Формула (1), выражающая критическое напряжение в функции от гибкости стержня, называется часто также формулой Эйлера, а подсчитанное таким образом критическое напряжение — эйлеровым напряжением.

Зависимость критического напряжения от гибкости стержня согласно (1) изображается в прямоугольной системе координат

гиперболой, так называемой эйлеровой гиперболой. Очевидно, что формула Эйлера справедлива до тех пор, пока подсчитанное по этой формуле критическое напряжение оказывается ниже предела текучести. Из условия

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \sigma_T$$

находим граничное значение гибкости

$$\lambda_T = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_T}}, \quad (3)$$

определяющее предел применимости формулы Эйлера. Если $\lambda > \lambda_T$, то критическое напряжение $\sigma_k < \sigma_T$ и определяется по формуле (1). В случае $\lambda < \lambda_T$ формула (1) дает $\sigma_k > \sigma_T$ и потому непригодна; в соответствии с предположением об абсолютной пластичности материала предел текучести σ_T следует рассматривать как верхнюю границу критических напряжений. Поэтому при $\lambda < \lambda_T$ критическое напряжение равно пределу текучести:

$$\sigma_k = \sigma_T. \quad (4)$$

Зависимость критических напряжений от гибкости стержня определяемая формулами (1) и (4), изображается графиком $\sigma_k(\lambda)$, состоящим из двух частей (рис. 15). При $\lambda < \lambda_T$ имеем отрезок прямой линии, параллельный оси $O\lambda$ и отстоящий от нее на расстояние σ_T , который смыкается в точке (λ_T, σ_T) с эйлеровой гиперболой, определяющей критические напряжения при $\lambda > \lambda_T$.

Итак, формула Эйлера применима для гибких стержней. При значениях $E = 2\,100\,000 \text{ кг/см}^2$, $\sigma_T = 2\,400 \text{ кг/см}^2$ согласно (3) находим $\lambda_T = 92,93$. Следовательно, формула Эйлера применима для стержней, гибкость которых превосходит 93. При меньшей гибкости формула Эйлера теряет свою силу и критическое напряжение принимается равным пределу текучести $\sigma_k = 2\,400 \text{ кг/см}^2$.

Таким образом, определение критических напряжений для центрально сжатого стержня на основе представления об упруго-пластическом материале не встречает каких-либо трудностей. Однако исследование работы сжато-изогнутого упруго-пластического стержня представляет собой в общем случае весьма сложную задачу. Причина затруднений заключается в сложном характере распределения напряжений по сечению сжато-изогнутого стержня, когда часть сечения вступила в область пластических

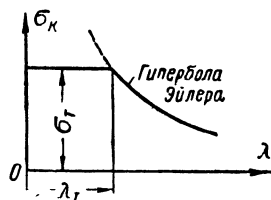


Рис. 15. График $\sigma_k(\lambda)$ для центрально-сжатого стержня

деформаций, в то время как все остальное сечение работает еще в упругой области. Условия равновесия между напряжениями, развивающимися в поперечном сечении сжато-изогнутого стержня, и внешними усилиями приводят к соотношениям, вид которых зависит от формы поперечного сечения и которые в общем случае являются весьма сложными. Поэтому аналитическое решение такого уравнения возможно только в некоторых простейших случаях. В отличие от случая изгиба упругого сжато-изогнутого стержня дифференциальное уравнение изгиба упруго-пластического сжато-изогнутого стержня не является линейным. Поэтому при исследовании работы упруго-пластического сжато-изогнутого стержня мы сталкиваемся с явлениями, принципиально отличными от тех, которые имеют место для упругого стержня.

Рассмотрим поперечное сечение сжато-изогнутого стержня, предполагая форму этого сечения произвольной. Назовем *фибровыми напряжениями* напряжения в крайних фибрах (волокнах) сечения и обозначим через σ_1 и ϵ_1 фибровое напряжение и соответствующее ему относительное удлинение на вогнутой (внутренней) стороне изогнувшегося стержня. Обозначим также через σ_2 и ϵ_2 фибровое напряжение и соответствующее ему относительное удлинение на выпуклой (наружной) стороне стержня, причем величине σ_2 будем приписывать положительное значение, если напряжение является растягивающим. Пусть в сечении стержня действуют усилия: изгибающий момент M и сжимающая сила N , приложенная в центре тяжести поперечного сечения. Возможны три стадии работы сечения в зависимости от характера эпюры напряжений.

Для каждой из этих стадий работы необходимо установить зависимость между элементами изгиба и внешними усилиями M и N . Исходя из выражения для кривизны при изгибе, получаем основное дифференциальное соотношение в виде

$$\kappa'' = \frac{1}{\rho}. \quad (5)$$

Рассмотрим каждую из трех стадий работы сечения в отдельности.

1. Первая стадия (упругая работа сечения)

$$\sigma_2 < \sigma_1 < \sigma_T; \quad \epsilon_2 < \epsilon_1 < \epsilon_T \quad (\text{рис. 16, I}).$$

В первой стадии фибровые напряжения лежат ниже предела текучести, все сечение работает целиком в упругой области. Исследованию именно этого случая упругой работы сжато-изогнутого стержня посвящена глава вторая.

Имеем

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\epsilon_1}{c} = -\frac{\sigma_1}{Ec},$$

где c — расстояние от нейтральной оси до крайнего вогнутого волокна сечения.

Основное дифференциальное соотношение принимает вид

$$y'' = -\frac{\sigma_1}{Ec}.$$

Для того чтобы исключить величины σ_1 и c , необходимо составить условия равновесия между внешними усилиями M и N и напряжениями. Обозначая через J момент инерции поперечного сечения, находим

$$\frac{\sigma_1}{c} = \frac{M}{J};$$

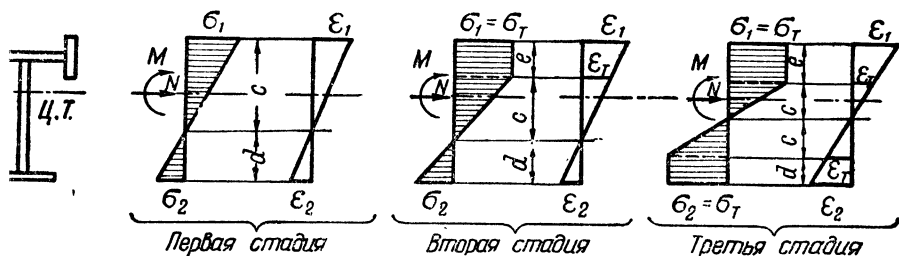


Рис. 16. Три стадии работы упруго-пластического сечения при воздействии сжимающей силы и момента

следовательно, дифференциальное уравнение изгиба в данном случае имеет вид

$$y'' = -\frac{M}{EJ}.$$

II. Вторая стадия (односторонняя текучесть)

$\sigma_1 = \sigma_T$; $\sigma_2 < \sigma_T$; $\epsilon_1 > \epsilon_T$; $\epsilon_2 < \epsilon_T$ (рис. 16, II).

Зона пластичности распространяется на часть сечения, прилегающую к вогнутому краю. Остальная часть сечения работает в упругой области. Имеем для кривизны следующее выражение:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\epsilon_T}{c} = -\frac{\sigma_T}{Ec},$$

где c — расстояние от нейтральной оси до зоны пластичности.

Дифференциальное уравнение изгиба

$$y'' = -\frac{\sigma_T}{Ec}$$

не может быть в данном случае приведено к явному виду для произвольной формы поперечного сечения, так как величина c не может быть в общем виде выражена через внешние усилия и

статические характеристики сечения. Однако, в частных случаях, для простейших форм поперечного сечения дифференциальное уравнение приводится к явному виду путем исключения величины c при помощи условий равновесия.

Возможна еще разновидность второй стадии упруго-пластической работы сечения, при которой зона текучести образуется сначала на растянутой от изгиба стороне сечения. Этот случай имеет место только лишь для резко несимметричных сечений.

III. Третья стадия (двусторонняя текучесть)

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_T; \quad \epsilon_1 > \epsilon_2 > \epsilon_T \text{ (рис. 16, III).}$$

Напряжения на вогнутой и выпуклой сторонах сечения превосходят предел текучести σ_T ; средняя часть сечения работает в упругой области. Так как

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\epsilon_T}{c} = -\frac{\sigma_T}{Ec},$$

где c — расстояние от нейтральной оси до одной из зон пластичности, то дифференциальное уравнение изгиба записывается так:

$$y'' = -\frac{\sigma_T}{Ec}.$$

Здесь величина c должна быть выражена через усилия M и N при помощи условий равновесия. Это может быть достигнуто в явном виде только в некоторых простейших случаях. При одной и той же форме поперечного сечения структура дифференциального уравнения для третьей стадии будет существенно отличаться от структуры соответствующего уравнения для второй стадии.

§ 16. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ИЗГИБА ДЛЯ СЛУЧАЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Рассмотрим случай прямоугольного поперечного сечения с высотой h и шириной b . Дифференциальное уравнение изгиба для сжато-изогнутого упруго-пластического стержня постоянного по всей длине прямоугольного поперечного сечения может быть проинтегрировано в квадратурах, если только закон изменения нагрузки является не слишком сложным.

Хотя стальные стержни с прямоугольной формой поперечного сечения почти не употребляются в современной строительной технике, точное аналитическое решение задачи об изгибе такого стержня имеет принципиальное значение, так как позволяет установить основные особенности работы упруго-пластических стержней.

Установим структуру дифференциальных уравнений изгиба для случая прямоугольного поперечного сечения, основываясь на предпосылках, которые были сформулированы в предыдущем параграфе.

I. Первая стадия (упругая работа сечения)

Так как в данном случае $J = \frac{bh^3}{12}$, то, обозначая

$$\alpha = \frac{2}{h} \sqrt{\frac{3\sigma_0}{E}}, \quad (6)$$

где $\sigma_0 = \frac{N}{bh}$, получаем дифференциальное уравнение изгиба

$$y'' = -\alpha^2 \frac{M}{N}. \quad (7)$$

II. Вторая стадия (односторонняя пластичность)

Условия равновесия между внешними и внутренними силами имеют вид (рис. 17,а).

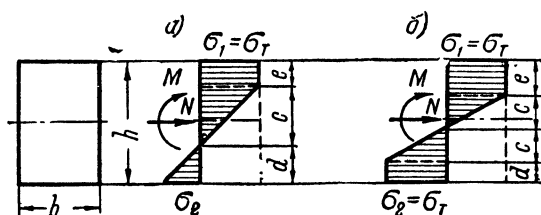


Рис. 17. Эпюры напряжений для прямоугольного сечения

а — вторая стадия; б — третья стадия

$$\frac{N}{b} = \sigma_0 h = \sigma_t h - (\sigma_t + \sigma_2) \frac{c+d}{2};$$

$$\frac{M}{b} = (\sigma_t + \sigma_2) \frac{c+d}{2} \left(\frac{h}{2} - \frac{c+d}{3} \right).$$

Из первого условия находим величину

$$\frac{c+d}{2} (\sigma_t + \sigma_2) = h (\sigma_t - \sigma_0),$$

подставляя которую во второе условие, получаем

$$c + d = \frac{3}{2} h - \frac{3M}{bh(\sigma_t - \sigma_0)}.$$

Далее, принимая во внимание

$$\sigma_2 = \frac{d}{c} \sigma_T,$$

из первого условия получаем

$$(c + d)^2 = 2 ch \frac{\sigma_T - \sigma_0}{\sigma_T}.$$

Из сравнения двух полученных выражений для $c + d$ находим окончательно

$$\frac{c}{h} = \frac{9\sigma_T \left[(\sigma_T - \sigma_0) - \frac{2M}{bh^2} \right]^2}{8(\sigma_T - \sigma_0)^3}. \quad (8)$$

Для компактности последующих выкладок примем обозначения

$$\left. \begin{aligned} m^2 &= \frac{2h\sigma_0}{9E} \left(\frac{\sigma_T}{\sigma_0} - 1 \right)^3; \\ n &= \frac{h}{2} \left(\frac{\sigma_T}{\sigma_0} - 1 \right); \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

тогда дифференциальное уравнение принимает вид

$$y' = - \frac{m^2}{\left(n - \frac{M}{N} \right)^2}. \quad (10)$$

Полученное дифференциальное уравнение второго порядка, в отличие от случая упругой работы, не является линейным.

III. Третья стадия (двусторонняя пластичность)

Условия равновесия записываются так (рис. 17,б):

$$\frac{N}{b} = \sigma_0 h = \sigma_T (e - d);$$

$$\frac{M}{b} = 2\sigma_T c \left(\frac{h}{2} - d - \frac{2}{3} c \right) + \sigma_T d (h - d).$$

Из первого условия находим

$$e = d + \frac{\sigma_0}{\sigma_T} h;$$

отсюда, используя соотношение

$$h = d + 2c + e,$$

получаем

$$d = \frac{h}{2} \left(1 - \frac{\sigma_0}{\sigma_T} \right) - c.$$

Подставляя найденное значение во второе условие равновесия, после упрощения находим

$$\frac{c}{h} = \sqrt{\frac{3}{4} \left(1 - \frac{\sigma_0^2}{\sigma_T^2} \right) - \frac{3M}{bh^2 \sigma_T}}. \quad (11)$$

Если принять обозначения

$$\left. \begin{aligned} v^2 &= \frac{\sigma_T}{E} \sqrt{\frac{\sigma_T}{3h \sigma_0}}; \\ w &= \frac{h}{4} \cdot \frac{\sigma_T}{\sigma_0} \left(1 - \frac{\sigma_0^2}{\sigma_T^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

то получим дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = - \frac{v^2}{\sqrt{w - \frac{M}{N}}}, \quad (13)$$

которое, так же как и (10), не является линейным.

Для возможности использования выведенных соотношений, стражающих упруго-пластическую работу прямоугольного поперечного сечения, необходимо установить пределы их применимости. Иначе говоря, необходимо установить критерии перехода от одной стадии к другой.

Переход от первой стадии ко второй совершается в тот момент, когда фибровые напряжения на вогнутой стороне стержня достигают предела текучести. Из условия

$$\sigma_1 = \frac{N}{bh} + \frac{6M}{bh^2} = \sigma_T$$

находим

$$\max M = \frac{bh^2}{6} (\sigma_T - \sigma_0). \quad (14)$$

При достижении изгибающим моментом величины, определяемой этой формулой, сечение начинает работать в условиях второй стадии. Поэтому дифференциальное уравнение (7) имеет силу только до тех пор, пока величина изгибающего момента не превышает предельного значения (14).

При дальнейшем возрастании момента сечение, работающее в условиях второй стадии, переходит в третью стадию работы. Это обстоятельство определяется достижением фибровыми напряжениями на выпуклом волокне предела текучести σ_T . В этом случае

$$\sigma_2 = \frac{d}{c} \sigma_T = \sigma_T,$$

т. е. должно быть $d=c$. Отсюда

$$\frac{d}{h} = \frac{c}{h} = \frac{\sigma_T - \sigma_0}{2\sigma_T}.$$

Сравнивая полученный результат с формулой (8), находим

$$\left[(\sigma_T - \sigma_0) - \frac{2M}{bh^2} \right]^2 = \frac{4}{9} \frac{(\sigma_T - \sigma_0)^4}{\sigma_T^2},$$

откуда наибольшее значение изгибающего момента, при котором еще справедливо уравнение (10), будет

$$\max M = \frac{bh^2}{6} (\sigma_T - \sigma_0) \left(1 + 2 \frac{\sigma_0}{\sigma_T} \right). \quad (15)$$

Соотношения третьей стадии сохраняют свою силу вплоть до того состояния, когда пластичность распространится на все поперечное сечение. В сечении образуется так называемый шарнир пластичности, и дальнейшее возрастание момента не может быть воспринято сечением. Полагая $c=0$ в формуле (11), находим

$$\max M = \frac{bh^2}{4} \sigma_T \left(1 - \frac{\sigma_0^2}{\sigma_T^2} \right). \quad (16)$$

Это есть наибольшая величина изгибающего момента, которая может быть воспринята прямоугольным сечением при заданном значении осевого напряжения σ_0 . Вместе с тем эта величина момента устанавливает предел применимости дифференциального уравнения (13).

Основные результаты настоящего параграфа сведены в табл. 5.

В качестве основного линейного параметра, определяющего размеры поперечного сечения стержня, примем не высоту сечения h , а ядровое расстояние

$$k = \frac{W}{F}, \quad (17)$$

равное отношению момента сопротивления к площади поперечного сечения стержня. Для прямоугольного сечения

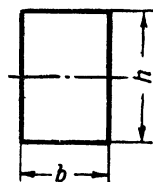
$$k = \frac{h}{6}.$$

Кроме того, примем сокращенное обозначение

$$\mu = \frac{\sigma_T}{\sigma_0} - 1, \quad (18)$$

Таблица 5

Упруго-пластическая работа прямоугольного сечения



$$\sigma_0 = \frac{N}{bh}$$

$$\mu = \frac{\sigma_T}{\sigma_0} - 1$$

$$k = \frac{h}{6}$$

Стадии	Первая	Вторая	Третья
Эпюры напряжений			
Вспомогательные величины	$\alpha = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\sigma_T}{3E(\mu+1)}}$	$m^2 = \frac{4}{3} \cdot k \cdot \frac{\sigma_T}{E} \cdot \frac{\mu^3}{\mu+1}$ $n = 3k\mu$	$v^2 = \frac{\sigma_T}{3E} \sqrt{\frac{\mu+1}{2\kappa}}$ $w = \frac{3}{2} k\mu \frac{\mu+2}{\mu+1}$
Дифференциальное уравнение	$y'' = -\alpha^2 \frac{M}{N}$	$y'' = -\frac{m^2}{\left(n - \frac{M}{N}\right)^2}$	$y'' = -\frac{v^2}{\sqrt{w - \frac{M}{N}}}$
Пределы применимости	$\frac{\max M}{N} = k\mu$	$\frac{\max M}{N} = k\mu \frac{\mu+3}{\mu+1}$	$\frac{\max M}{N} = \frac{3}{2} k\mu \frac{\mu+2}{\mu+1}$

тогда зависимости (6), (9) и (12) запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\sigma_T}{3E(\mu+1)}}; \\ m^2 &= \frac{4}{3} k \frac{\sigma_T}{E} \cdot \frac{\mu^3}{\mu+1}; \\ v^2 &= \frac{\sigma_T}{3E} \sqrt{\frac{\mu+1}{2k}}; \\ n &= 3k\mu; \quad w = \frac{3}{2} k\mu \frac{\mu+2}{\mu+1}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Предельные значения моментов, обуславливающие переход от одной стадии работы к другой, принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \text{первая стадия} & \quad \frac{\max M}{N} = k\mu; \\ \text{вторая стадия} & \quad \frac{\max M}{N} = k\mu \frac{\mu+3}{\mu+1}; \\ \text{третья стадия} & \quad \frac{\max M}{N} = \frac{3}{2} k\mu \frac{\mu+2}{\mu+1}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

На основании этих соотношений можно построить график (рис. 18) зависимости между M и N для трех стадий работы прямоугольного сечения. На графике обозначены: *I*—область упругой работы; *II*—область односторонней текучести; *III*—область двусторонней текучести.

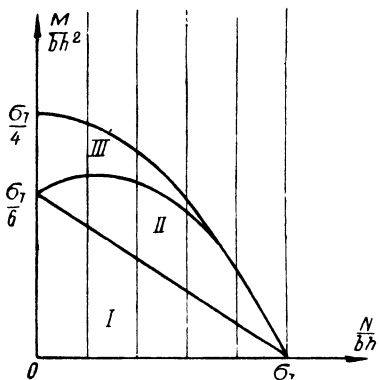


Рис. 18. График зависимости между M и N для трех стадий работы прямоугольного сечения

§ 17. ВНЕЦЕНТРЕННО СЖАТЫЙ СТЕРЖЕНЬ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ. ФОРМЫ РАВНОВЕСИЯ

Займемся теперь аналитическим исследованием работы сжато-изогнутого упруго-пластического стержня прямоугольной формы поперечного сечения на основе выведенных в предыдущем параграфе зависимостей.

Частным случаем сжато-изогнутого стержня является внецентренно сжатый стержень.

Представим себе прямой шарнирно опертый стержень, на концах которого приложена с эксцентриситетом a — сжимающая сила N

(рис. 19). Пусть поперечное сечение стержня постоянно по всей длине его и представляет собой прямоугольник с высотой h и шириной b . Примем длину стержня равной l и поместим начало координат в середине пролета стержня.

Изгибающий момент в точке стержня, имеющий координаты x, y , равен

$$M = N(a + y).$$

На опоре, при $x = \frac{l}{2}$, изгибающий момент равен $M = Na$. В зависимости от величины этого момента опорное сечение стержня может работать в условиях первой, второй или третьей стадии. По мере приближения к середине пролета прогиб стержня увеличивается, увеличивается также и изгибающий момент. Поэтому сечение стержня в середине пролета может работать в условиях второй или даже третьей стадии, в то время как примыкающие к опорам участки стержня работают еще вполне упруго. Мы говорим в этом случае, что изогнутая ось стержня состоит из нескольких ветвей, понимая под ветвью участок изогнутой оси, все сечения которого работают в условиях одной определенной стадии. В соответствии с тремя стадиями работы упруго-пластического сечения следует различать три ветви изогнутой оси:

ветвь I, характеризующаяся упругой работой материала;
ветвь II, по всей длине которой имеет место односторонняя фибровая текучесть;

ветвь III, все сечения которой испытывают двустороннюю фибровую текучесть.

В силу симметрии системы достаточно рассмотреть половину стержня. Изогнутая ось половины стержня может быть образована одной, двумя или тремя ветвями, причем эти ветви плавно сопрягаются друг с другом. В зависимости от того, каким образом сочетаются одна с другой эти ветви, возможны различные формы равновесия стержня. Для внецентренно сжатого стержня прямоугольного сечения возможны всего 6 форм равновесия, каждая из которых определяется сочетанием ветвей по следующей схеме.

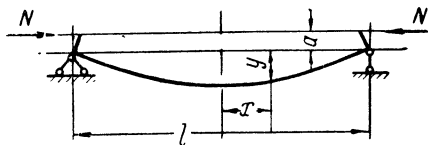


Рис. 19. Внецентренно сжатый шарнирно опертый стержень

Форма равновесия	1	2	3	4	5	6
Ветви	I	II	III	I+II	II+III	I+II+III

Очевидно, что при исследовании форм равновесия 4, 5 и 6 длину стержня приходится разбивать на участки соответственно числу ветвей. Так как каждая ветвь управляется своим дифференциальным уравнением второго порядка, то полное решение задачи содержит вдвое больше постоянных интегрирования, чем имеется ветвей. Например, форма равновесия 6 характеризуется наличием ветвей I, II и III; в соответствии с числом ветвей полное решение задачи потребует определения шести постоянных интегрирования.

Рассмотрим первые три формы равновесия, при которых все сечения стержня работают в условиях одной определенной стадии. В этом случае для полного решения задачи требуется определение всего лишь двух постоянных интегрирования.

Форма равновесия 1 (ветвь I)

Общий интеграл дифференциального уравнения изгиба

$$y'' = -\alpha^2(a + y)$$

имеет вид

$$y = A_1 \sin \alpha x + A_2 \cos \alpha x - a.$$

В силу симметрии изогнутой оси относительно середины пролета угол поворота в точке $x = 0$ равен нулю. Имеем

$$y' = A_1 \alpha \cos \alpha x - A_2 \alpha \sin \alpha x;$$

$$y'_0 = A_1 \alpha \cdot 1 - A_2 \alpha \cdot 0 = 0,$$

следовательно:

$$A_1 = 0.$$

Из условия $y = 0$ при $x = \frac{l}{2}$ находим

$$A_2 = \frac{a}{\cos \frac{\alpha l}{2}}.$$

Принимая обозначение

$$u = \alpha l = \sqrt{\frac{\sigma_r}{3E(\mu + 1)}} \cdot \frac{l}{k}, \quad (21)$$

получаем окончательно

$$y = a \left(\frac{\cos \frac{\alpha x}{2}}{\cos \frac{u}{2}} - 1 \right). \quad (22)$$

Прогиб в середине пролета равен

$$y_0 = a \left(\frac{1}{\cos \frac{u}{2}} - 1 \right).$$

Чтобы иметь дело с величинами нулевой размерности, введем понятие относительного прогиба

$$\eta = \frac{y_0}{k}. \quad (23)$$

Относительный прогиб есть, таким образом, отношение наибольшей ординаты изогнутой оси стержня к ядровому расстоянию поперечного сечения. Назовем также относительным эксцентриситетом отношение плеча силы к ядровому расстоянию

$$\nu = \frac{a}{k}. \quad (24)$$

На основании полученной выше формулы для прогиба имеем

$$\eta = \nu \left(\frac{1}{\cos \frac{u}{2}} - 1 \right). \quad (25)$$

Наибольшая величина момента, при которой сохраняют свою силу полученные соотношения, равна

$$\frac{\max M}{N} = y_0 + a = k \mu;$$

следовательно, величина прогиба должна удовлетворять неравенству

$$\eta < \mu - \nu. \quad (a)$$

Пусть заданы относительный эксцентриситет ν и гибкость стержня

$$\lambda = \frac{l}{i} = \frac{l}{k \sqrt{3}}, \quad (26)$$

равная отношению длины стержня к радиусу инерции поперечного сечения. Соответствующее значение осевого напряжения находится по формуле

$$\sigma_0 = \frac{u^2 E}{\lambda^2}. \quad (27)$$

Зависимость осевого напряжения σ_0 от прогиба η была уже установлена в главе второй. Кривая $\sigma_0(\eta)$ при возрастании η

асимптотически приближается к прямой, параллельной оси $O\eta$ и отстоящей от нее на расстоянии

$$\sigma_3 = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (28)$$

Определяемое этой формулой эйлерово напряжение представляет собой критическое напряжение для центрально сжатого абсолютно упругого стержня данной гибкости.

Построенная таким образом кривая $\sigma_0(\eta)$ справедлива только до тех пор, пока прогиб не превзойдет величины, определяемой соотношением (а). Отсюда находим уравнение вспомогательной кривой

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_T}{1 + \nu + \eta}.$$

точка пересечения которой с нашей кривой определяет предел применимости последней. При дальнейшем возрастании осевого напряжения σ_0 в наиболее напряженном сечении стержня на вогнутой стороне образуется зона пластичности, которая по мере роста σ_0 распространяется как по высоте сечения, так и по длине стержня. Средний участок длины стержня работает в условиях второй стадии, изогнутая ось стержня состоит из ветвей I и II (форма равновесия 4).

Форма равновесия 2 (ветвь II)

Дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня

$$y'' = - \frac{m^2}{(n - a - y)^2}$$

имеет общий интеграл¹

$$y = n - a - B_1^2 t, \quad (29)$$

причем переменная t удовлетворяет соотношению

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sqrt{2m}}{B_1^3} \sqrt{\frac{t-1}{t}}. \quad (30)$$

Здесь B_1 — постоянная интегрирования.

Интегрируя полученное уравнение, находим

$$x = \frac{B_1^3}{\sqrt{2m}} \left[\sqrt{t(t-1)} + \text{Arsh} \sqrt{t-1} \right] + B_2.$$

Здесь B_2 — вторая постоянная интегрирования;

¹ Решение принадлежит К. Ежеку, см. сноску на стр. 17.

Arsh — обратная гиперболическая функция¹.

Для определения постоянной B_2 учтем, что при $x = 0$

$$y'_0 = -\frac{\sqrt{2m}}{B_1} \sqrt{\frac{t_0-1}{t_0}} = 0,$$

где t_0 — значение переменной t при $x = 0$.

Отсюда находим $t_0 = 1$, следовательно:

$$0 = \frac{B_1^3}{\sqrt{2m}} \left[\sqrt{t_0(t_0-1)} + \text{Arsh} \sqrt{t_0-1} \right] + B_2,$$

и, так как $\text{Arsh} = 0$, получаем $B_2 = 0$.

Итак, абсцисса изогнутой оси стержня выражается при помощи радикала и обратной гиперболической функции

$$x = \frac{B_1^3}{\sqrt{2m}} \left[\sqrt{t(t-1)} + \text{Arsh} \sqrt{t-1} \right],$$

как функция вспомогательной переменной t . Это соотношение вместе с выражением для ординаты (29) дают параметрическое представление изогнутой оси стержня.

Остается еще исключить постоянную B_1 . Для этого используем граничное условие на опоре: $y=0$ при $x = \frac{l}{2}$. Пусть будет t_1 значение t при $x = \frac{l}{2}$, тогда из условия $0 = n - a - B_1^2 t_1$

находим

$$B_1 = \sqrt{\frac{n-a}{t_1}}.$$

Далее, имеем

$$\frac{l}{2} = \left(\frac{n-a}{t_1} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{2m}} \left[\sqrt{t_1(t_1-1)} + \text{Arsh} \sqrt{t_1-1} \right],$$

откуда, после возведения в квадрат обеих частей равенства и замены величин m , n и a их выражениями по формулам (19) и (24), получаем

$$\lambda^2 = \frac{1}{2} \theta^2(t_1) \frac{E}{\sigma_r} \left(3 - \frac{\nu}{\mu} \right)^3 (\mu + 1). \quad (31)$$

Здесь символом $\theta(t)$ обозначена функция

$$\theta(t) = \frac{\sqrt{t-1}}{t} + \frac{\text{Arsh} \sqrt{t-1}}{t \sqrt{t-1}}. \quad (32)$$

¹ Эта функция может быть выражена также при помощи логарифма

$$\text{Arsh } z = \ln \left(z + \sqrt{z^2 + 1} \right),$$

следовательно:

$$\text{Arsh} \sqrt{t-1} = \ln \left(\sqrt{t-1} + \sqrt{t} \right).$$

Уравнение изогнутой оси (30) после подстановки значения B_1 принимает вид

$$y = (n - a) \left(1 - \frac{t}{t_1} \right).$$

Наибольший прогиб в середине пролета при $x=0$, $t=t_0=1$ будет

$$y_0 = (n - a) \left(1 - \frac{1}{t_1} \right),$$

следовательно, для относительного прогиба имеем

$$\eta = (3\mu - \nu) \left(1 - \frac{1}{t_1} \right). \quad (33)$$

Рассмотрим теперь условия, при которых стержень по всей своей длине работает во второй стадии. Изгибающий момент в опорном сечении $M_1 = aN$ должен быть достаточно велик, чтобы имела место фибровая текучесть. Для этого необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\nu > \mu. \quad (b)$$

С другой стороны, изгибающий момент в середине пролета $M_0 = N(a + y_0)$, для того чтобы напряжения на выпуклой стороне были ниже предела текучести, должен быть меньше максимального момента второй стадии:

$$\frac{\max M}{N} = k\mu \frac{\mu + 3}{\mu + 1}.$$

Отсюда находим неравенство, которому должен удовлетворять прогиб

$$\eta < \frac{\mu + 3}{\mu + 1} \mu - \nu. \quad (c)$$

В качестве примера применения выведенных формул построим график $\sigma_0(\eta)$ для стержня гибкостью $\lambda=40$ при относительном эксцентриситете $\nu=0,6$. Для определения пары соответствующих значений η и σ_0 поступаем следующим образом. Задаемся некоторым значением σ_0 , находим согласно (18) величину μ и вычисляем при помощи соотношения (31) значение $\theta(t_1)$. Пользуясь таблицей функции $\theta(t)$, находим соответствующее значение t_1 . После этого вычисление относительного прогиба η по формуле (33) не представит затруднений.

Рассматривая график (рис. 20) функции $\theta(t)$, видим, что функция эта возрастает довольно быстро при возрастании аргу-

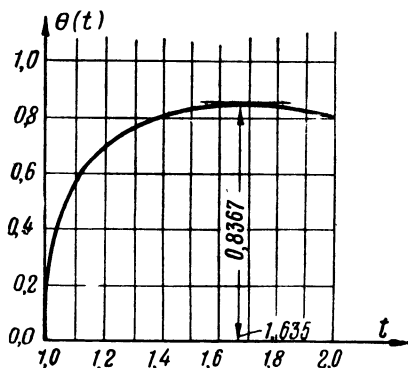


Рис. 20. График функции $\theta(t)$

мента от значения $t=1$ до значения $t \approx 1,6$, после чего начинает медленно убывать. Отсюда следует, что существуют два значения аргумента t , для каждого из которых функция $\theta(t)$ имеет одну и ту же величину.

Зададимся, например, значением $\sigma_0 = 1\,690 \text{ кг/см}^2$. Находим

$$\mu = \frac{2\,400}{1\,690} - 1 = 0,420.$$

Далее вычисляем

$$\theta^2(t_1) = \frac{2\lambda^2 \sigma_T}{\left(3 - \frac{\nu}{\mu}\right)^3 (\mu + 1) E} = \frac{2 \cdot 40^2 \cdot 2\,400}{\left(3 - \frac{0,6}{0,420}\right)^3 (0,420 + 1) 2\,100\,000} = 0,661,$$

следовательно, $\theta(t_1) = 0,813$. Этому значению функции соответствуют два значения аргумента t . Для первого значения $t_1 = 1,405$ находим

$$\eta = (3 \cdot 0,420 - 0,6) \left(1 - \frac{1}{1,405}\right) = 0,190,$$

а для второго значения $t_1 = 1,988$ получаем

$$\eta = (3 \cdot 0,420 - 0,6) \left(1 - \frac{1}{1,988}\right) = 0,328.$$

Легко видеть, что условие (b) удовлетворено. Убеждаемся также, что удовлетворяется и неравенство (c):

$$\eta < \frac{\mu + 3}{\mu + 1} \mu - \nu = \frac{0,420 + 3}{0,420 + 1} 0,420 - 0,6 = 0,41.$$

Отсюда следует, что найденные соотношения действительно определяют собой равновесные состояния стержня, который по всей своей длине работает в условиях второй стадии, т. е. при односторонней фибровой текучести.

Разыскивая подобным же образом другие соответствующие друг другу пары значения η и σ_0 , получаем график (рис. 21), позволяющий сделать интересные и важные выводы.

1. Функция $\sigma_0(\eta)$ монотонно возрастает до значения $\sigma_0 = 1\,699 \text{ кг/см}^2$ (при $\eta = 0,249$), которое является максимальным, после чего начинает убывать.

2. При одном и том же значении осевого напряжения σ_0 возможны два различных равновесных состояния стержня, каждому из которых соответствует свое определенное значение прогиба. Так, при $\sigma_0 = 1\,690 \text{ кг/см}^2$ первому равновесному состоянию соответствует прогиб $\eta = 0,190$, второму равновесному состоянию — прогиб $\eta = 0,328$.

3. Если осевое напряжение превосходит максимальное значение $\sigma_0 = 1\,699 \text{ кг/см}^2$, то равновесие становится невозможным и наступает разрушение стержня.

Отсюда следует, что осевое напряжение $\sigma_0 = 1699 \text{ кг/см}^2$ является в данном случае критическим: дальнейшее увеличение осевого напряжения уже не может быть воспринято стержнем.

Мы будем говорить в этом случае о потере устойчивости сжато-изогнутого упруго-пластического стержня, причем очевидно, что рассматриваемое явление принципиально отличается от явления упругой потери устойчивости центрально сжатого стержня.

Подробный анализ явления потери устойчивости сжато-изогнутого упруго-пластического стержня будет дан несколько ниже. Там же будут даны аналитические критерии, позволяющие найти величину критических напряжений в этом случае.

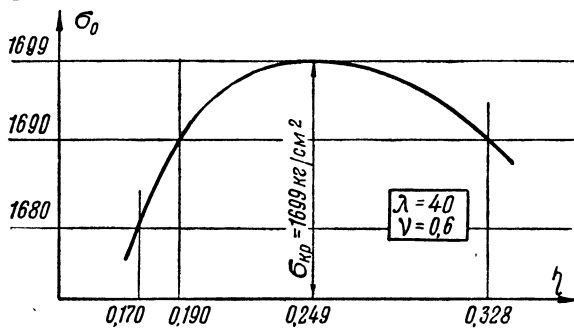


Рис. 21. График $\sigma_0(\eta)$ для формы равновесия 2

По уравнениям $\mu = \nu$; $\eta = \frac{\mu + 3}{\mu + 1}$ μ и ν могут быть нанесены на график $\sigma_0(\eta)$ две вспомогательные кривые. Между точками пересечения этих кривых с кривой $\sigma_0(\eta)$ находится область действия выведенных выше формул.

Форма равновесия 3 (ветвь III)

Общий интеграл дифференциального уравнения

$$y'' = - \frac{v^2}{\sqrt{w - a - y}}$$

примем в форме

$$y = w - a - C_1^4 z^2. \quad (34)$$

Здесь вспомогательная переменная z должна удовлетворять уравнению

$$\frac{dz}{dx} = \frac{v}{C_1^3} \cdot \frac{\sqrt{z-1}}{z}, \quad (35)$$

где C_1 — постоянная интегрирования.

Интегрируя уравнение (35), получаем

$$x = \frac{2C_1^3}{3v} (z+2) \sqrt{z-1} + C_2.$$

Здесь C_2 — вторая постоянная интегрирования.

Найденное решение дает выражение координат изогнутой оси в функции от вспомогательной переменной z . Для определения постоянной C_2 находим сначала из условия

$$y'_0 = -2C_1 v \sqrt{z_0-1} = 0$$

значение переменной z при $x=0$, $z_0=1$, после чего соотношение

$$0 = \frac{2C_1^3}{3v} (z_0+2) \sqrt{z_0-1} + C_2$$

дает

$$C_2 = 0.$$

Для определения постоянной C_1 используем второе граничное условие: $y=0$ при $x=\frac{l}{2}$. Если z_1 — значение переменной z при $x=\frac{l}{2}$, то на основании (34) имеем

$$C_1^2 = \frac{V_{w-a}}{z_1}.$$

Подставляя найденные значения C_1 и C_2 , получаем для абсциссы x выражение

$$x = \frac{2}{3v} \cdot \frac{(w-a)^{\frac{3}{4}}}{z_1^{\frac{3}{2}}} (z+2) \sqrt{z-1}.$$

Полагая $x=\frac{l}{2}$, находим

$$\frac{l}{2} = \frac{2}{3v} (w-a)^{\frac{3}{4}} \frac{z_1+2}{z_1} \sqrt{\frac{z_1-1}{z_1}}.$$

После возведения в квадрат обеих частей равенства и замены величин v , w и a по формулам (19) и (24) получаем

$$\lambda^2 = \frac{16V_2}{9} \Phi^2(z_1) \frac{E}{\sigma_r} \cdot \frac{1}{V_{\mu+1}} \left(\frac{3}{2} \mu^{\frac{\mu+2}{\mu+1}} - \nu \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (36)$$

где функция $\Phi(z)$ определяется соотношением

$$\Phi(z) = \frac{z+2}{z} \sqrt{\frac{z-1}{z}}. \quad (37)$$

Выражение (34) для ординаты изогнутой оси после подстановки значения C_1 принимает вид

$$y = (w-a) \left(1 - \frac{z^2}{z_1^2} \right).$$

Наибольший прогиб имеет место в середине пролета при $x = \frac{l}{2}$

$$y_0 = (w-a) \left(1 - \frac{1}{z_1^2} \right),$$

а относительный прогиб равен

$$\eta = \left(\frac{3}{2} \mu \frac{\mu+2}{\mu+1} - \nu \right) \left(1 - \frac{1}{z_1^2} \right). \quad (38)$$

Пределы применимости выведенных формул определяются следующим образом. Во-первых, величина момента на опоре должна быть достаточна для образования в опорном сечении двусторонней текучести. Для этого величина относительного эксцентриситета должна удовлетворять неравенству

$$\nu > \mu \frac{\mu+3}{\mu+1}. \quad (d)$$

Во-вторых, наибольший изгибающий момент не может превышать величины, при которой в сечении стержня образуется шарнир пластичности. Отсюда получаем условие

$$\eta < \frac{3}{2} \mu \frac{\mu+2}{\mu+1} - \nu,$$

ограничивающее величину относительного прогиба.

График функции $\Phi(z)$ по своему очертанию напоминает график функции $\theta(t)$. Одному и тому же значению функции $\Phi(z)$ соответствуют два значения аргумента z . Отсюда становится ясным, что график $\sigma_0(\eta)$ для упруго-пластического стержня при его работе в третьей стадии (двусторонняя текучесть) вполне аналогичен соответствующему графику для стержня, работающего в условиях второй стадии (односторонняя текучесть).

Полученные результаты показывают, что при двусторонней текучести зависимость между η и σ_0 имеет такой же характер, как и при односторонней текучести. Потеря устойчивости сжато-изогнутого упруго-пластического стержня при достижении осевыми напряжениями критического значения в случае работы

стержня в третьей стадии происходит таким же образом, как и при работе стержня во второй стадии.

Мы не будем приводить здесь довольно громоздкие выкладки, получающиеся при исследовании форм равновесия 4, 5, 6. Результаты такого исследования показывают, что закономерности, установленные при рассмотрении форм равновесия 2 и 3, сохраняют свою силу.

На основании анализа упруго-пластических форм равновесия 2, 3, 4, 5 и 6 выражение для гибкости стержня может быть записано в виде

$$\lambda = \sqrt{\frac{E}{\sigma_T}} f(\mu, \nu, s), \quad (39)$$

а для максимального относительного прогиба — в виде

$$\eta = g(\mu, \nu, s). \quad (40)$$

Здесь s — значение вспомогательной переменной, например, t_1 в формулах (31) и (33) или z_1 в формулах (36) и (38). Функции трех переменных f и g , естественно, имеют различное аналитическое выражение для каждой из пяти упомянутых выше форм равновесия.

§ 18. АНАЛИТИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО СЖАТО-ИЗОГНУТОГО СТЕРЖНЯ

Исследуем, пользуясь данными § 17, зависимость между величиной сжимающей силы N и величиной наибольшего прогиба стержня при данных гибкости λ и эксцентриситета a . С этой целью строим график $\sigma_0(\eta)$, изображающий в прямоугольной системе координат указанную зависимость. При этом избираем в качестве переменной, представляющей величину сжимающей силы, осевое напряжение $\sigma_0 = \frac{N}{F}$, а в качестве меры дефор-

мированного состояния стержня — относительный прогиб $\eta = \frac{y_0}{k}$.

Очертание графика $\sigma_0(\eta)$ дает возможность установить, что для каждого значения σ_0 , меньшего, чем некоторое наибольшее значение, существуют два равновесных состояния стержня (рис. 21), каждое из которых характеризуется своей величиной прогиба η . Первичному состоянию равновесия соответствует меньший прогиб η_1 . Это состояние возникает в процессе естественного возрастания осевого напряжения σ_0 . Соответствующая точка кривой $\sigma_0(\eta)$ расположена на восходящей ветви этой кривой. Вторичному состоянию равновесия отвечает больший прогиб η_2 . Нисходящая ветвь кривой $\sigma_0(\eta)$ является геометрическим местом точек, соответствующих вторичным состояниям равновесия.

Первичное состояние равновесия характеризуется условием

$$\frac{\partial \sigma_0}{\partial \eta} > 0$$

и является состоянием устойчивого равновесия. Наоборот, для вторичного состояния равновесия имеем

$$\frac{\partial \sigma_0}{\partial \eta} < 0;$$

вторичное состояние равновесия является неустойчивым.
Условие

$$\frac{\partial \sigma_0}{\partial \eta} = 0 \quad (41)$$

является аналитическим критерием потери устойчивости для рассматриваемой задачи. Определяемое этим критерием наибольшее значение осевого напряжения является критическим напряжением. В отличие от критического напряжения σ_k при центральном сжатии критическое напряжение для сжато-изогнутого стержня будем обозначать символом $\sigma_{кр}$.

При значении осевого напряжения $\sigma_0 > \sigma_{кр}$ равновесие невозможно. В качестве меры устойчивости стержня можно принимать разность прогибов вторичного и первичного состояния равновесия $(\eta_2 - \eta_1)$. Очевидно, что при $\sigma_0 = \sigma_{кр}$ разность эта равна нулю.

Вывод критерия потери устойчивости (41) основан на том, что из трех величин l , N и y_0 (или в безразмерной форме λ , σ_0 , η) предполагают длину стержня l постоянной и анализируют зависимость между сжимающей силой N и прогибом y_0 . Возможен и другой подход к исследованию, при котором предполагают заданной сжимающую силу N и анализируют зависимость между длиной стержня l и прогибом y_0 . Каждому значению y_0 (или η) соответствуют, вообще говоря, два значения l (или λ). Кривая зависимости l от y_0 (или λ от η) имеет максимум. Это наибольшее значение длины l (или гибкости λ) определяет собой критическое состояние стержня в указанном выше смысле.

Аналитический критерий потери устойчивости для этого случая записывается в форме

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \eta} = 0. \quad (42)$$

Назовем *опасным* напряжением и обозначим $\sigma_{оп}$ то значение осевого напряжения, при котором фибровые напряжения в середине пролета стержня достигают предела текучести. Очевидно, что при $\sigma_0 < \sigma_{оп}$ стержень работает еще вполне упруго. С

другой стороны, критическое напряжение меньше эйлерова напряжения

$$\sigma_3 = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

Таким образом, имеет место неравенство

$$\sigma_{оп} < \sigma_{кр} < \sigma_3, \quad (43)$$

определяющее интервал изменения критических напряжений.

В качестве конкретного примера рассмотрим график $\sigma_0(\eta)$ для внецентренно сжатого стержня при гибкости $\lambda = 150$ и относительном эксцентриситете $\nu = \frac{a}{k} = 0,6$ (рис. 22). Ветвь ОА кривой отображает стадию упругой работы материала. На основании зависимостей (21) и (25) имеем

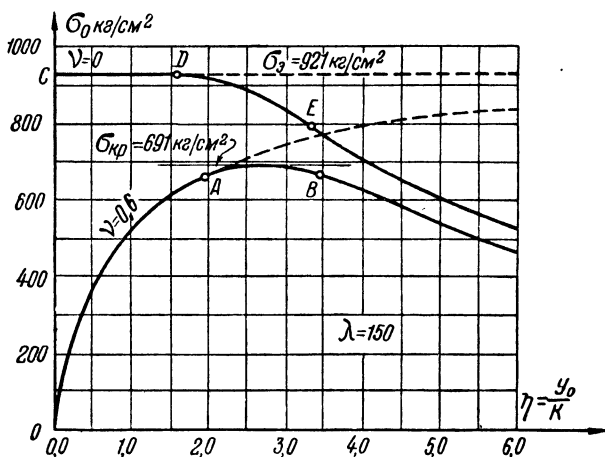


Рис. 22. График $\sigma_0(\eta)$ при $\lambda = 150$ для $\nu = 0,6$ и $\nu = 0$

$$\eta = \nu \left(\frac{1}{\cos \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{\sigma_0}{E}}} - 1 \right),$$

откуда находим напряжение от момента в среднем сечении стержня

$$\frac{M}{W} = \frac{N(y_0 + a)}{kF} = \sigma_0(\eta + \nu) = \frac{\sigma_0 \nu}{\cos \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{\sigma_0}{E}}}.$$

Приравнявая фибровое напряжение пределу текучести, получаем уравнение

$$\sigma_{оп} \left(1 + \frac{\nu}{\cos \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{\sigma_{оп}}{E}}} \right) = \sigma_T, \quad (44)$$

при помощи которого можно вычислить величину опасного напряжения для заданных значений ν и λ .

Уравнение (44) сохраняет свою силу при любой форме поперечного сечения стержня. В нашем случае находим $\sigma_{оп} = 668 \text{ кг/см}^2$. Участок AB кривой $\sigma_0(\eta)$ соответствует форме равновесия 4. Наибольшее напряжение лежит в этом участке и равно $\max \sigma_0 = \sigma_{кр} = 691 \text{ кг/см}^2$. Согласно сказанному выше, это напряжение является критическим для стержня. Дальнейшее течение кривой $\sigma_0(\eta)$ соответствует форме равновесия 6, которая сменяется затем последовательно формами 5 и 3.

Эйлерово напряжение для стержня данной гибкости $\lambda = 150$ будет $\sigma_э = 921 \text{ кг/см}^2$. Кривая $\sigma_0(\eta)$ для абсолютно упругого стержня показана на графике пунктиром.

Отмеченные выше характерные особенности явления потери устойчивости внецентренно сжатого упруго-пластического стержня прямоугольного сечения имеют место для всякого упруго-пластического сжато-изогнутого стержня произвольной формы поперечного сечения при любом типе поперечной нагрузки. Общий аналитический критерий потери устойчивости для таких стержней может быть записан в одной из форм (41) или (42).

Остается еще дополнить исследование рассмотрением работы центрально сжатого упруго-пластического стержня. Если положить в полученных для внецентренно сжатого стержня формулах $\nu = 0$, то можно построить график $\sigma_0(\eta)$, отображающий работу центрально сжатого стержня. Соответствующая кривая (рис. 22) от начала координат до значения $\sigma_0 = \sigma_э$ совпадает с осью $O\sigma$. Это означает, что при $\sigma_0 < \sigma_э$ возможно только лишь состояние прямолинейного равновесия ($\eta = 0$) которое является устойчивым. При достижении осевым напряжением значения $\sigma_э$ стержень вступает в состояние безразличного равновесия. Соответствующий участок кривой $\sigma_0(\eta)$ представляет собой отрезок прямой линии $\sigma_0 = \sigma_э$, параллельный оси $O\eta$. Эйлерово напряжение является для центрально сжатого стержня критическим

$$\sigma_k = \sigma_э = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

и достижение осевым напряжением этого значения определяет момент потери устойчивости. На этом этапе стержень работает еще вполне упруго; прогиб стержня возрастает при постоянном значении осевого напряжения до тех пор, пока фибровые напряжения в наиболее напряженном сечении не достигнут предела текучести (точка D на графике). При дальнейшем воз-

растании прогиба η в средней части длины стержня образуется зона односторонней текучести со стороны вогнутого волокна. Кривая $\sigma_0(\eta)$ начинает плавно опускаться вниз, т. е. возрастанию прогиба соответствует снижение осевого напряжения σ_0 . На этом этапе работы имеет место неравенство $\frac{\partial \sigma_0}{\partial \eta} < 0$ и стержень находится в состоянии неустойчивого равновесия.

Резюмируя, можем сказать, что для центрально сжатого упруго-пластического стержня имеют место три резко различных этапа работы. Первый этап: $\sigma_0 < \sigma_s$, $\eta = 0$ — состояние устойчивого равновесия (участок *OC* графика). Второй этап: $\sigma_0 = \sigma_s$, $\eta > 0$ — состояние безразличного равновесия (участок *CD* графика). Первые два этапа протекают в стадии упругой работы стержня. Третий этап: $\sigma_0 < \sigma_s$, $\eta > 0$ — состояние неустойчивого равновесия (на графике участок *DE* и далее). В этом третьем этапе стержень работает в упруго-пластической области.

Каждому значению $\sigma_0 < \sigma_s$ соответствуют два состояния равновесия: первичное при $\eta = 0$ (устойчивое) и вторичное при $\eta > 0$ (неустойчивое).

Длина участка *CD*, отражающего состояние безразличного равновесия стержня, тем меньше, чем ближе величина эйлерова напряжения к пределу текучести. При $\sigma_k = \sigma_s = \sigma_T$ протяженность этой площадки сводится к нулю. Действительно, в этом случае достаточно сколь угодно малого прогиба для образования односторонней текучести в средней части стержня.

Аналитически это обстоятельство может быть выражено следующим образом. Пусть осевые напряжения шарнирно опертого стержня достигли величины σ_s ; прогиб η будет тогда произвольным по величине, если только стержень работает вполне упруго. Пусть будет η_T — значение прогиба, при котором в среднем сечении стержня фибровые напряжения достигают предела текучести. Из условия

$$\sigma_T = \sigma_s (1 + \eta_T)$$

находим

$$\eta_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_s} - 1$$

Выражая σ_s через гибкость стержня, имеем также

$$\eta_T = \frac{\sigma_T}{\pi^2 E} \lambda^2 - 1.$$

Во всех выведенных в этом параграфе формулах предполагается, что эйлерово напряжение ниже предела текучести $\sigma_s < \sigma_T$, или, что то же, гибкость стержня выше граничной гибкости $\lambda > \lambda_T$.

Заметит, что для центрально сжатого стержня возможен еще один этап упругой работы, именно состояние неустойчивого равновесия при $\sigma_s < \sigma_0 < \sigma_T$, $\eta = 0$. Малейшее отклонение от прямо-

линейности выводит стержень из состояния равновесия, и это равновесие уже вновь не может быть достигнуто даже ценой образования пластических деформаций

§ 19. ВНЕЦЕНТРЕННО СЖАТЫЙ СТЕРЖЕНЬ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ. КРИТИЧЕСКОЕ НАПРЯЖЕНИЕ

Полученные выше зависимости позволяют найти критическое напряжение для внецентренно сжатого стержня прямоугольной формы поперечного сечения. Мы будем исходить из критерия потери устойчивости (42)

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \eta} = 0,$$

предполагая осевое напряжение σ_0 фиксированным.

Уравнения (39) и (40) показывают, что гибкость выражается как функция относительного прогиба η при посредстве вспомогательной переменной s . Поэтому критерий потери устойчивости принимает вид

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \eta} = \frac{\partial \lambda}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial \eta} = 0,$$

или, так как $\frac{\partial s}{\partial \eta} \neq 0$,

$$\frac{\partial \lambda}{\partial s} = 0. \quad (45)$$

Поскольку при упругой работе сжато-изогнутого стержня потеря устойчивости невозможна то существует всего пять форм потери устойчивости внецентренно сжатого стержня прямоугольного сечения, соответствующих формам равновесия 2—6.

Для формы потери устойчивости 2 гибкость определяется соотношением (31)

$$\lambda^2 = \frac{1}{2} \theta^2(t_1) \frac{E}{\sigma_r} \left(3 - \frac{\nu}{\mu}\right)^3 (\mu + 1).$$

Условие (45) приводит к уравнению $\frac{d\theta(t_1)}{dt_1} = 0$, откуда, принимая во внимание (32)

$$\theta(t) = \frac{\sqrt{t-1}}{t} + \frac{\text{Arsh } \sqrt{t-1}}{t \sqrt{t}},$$

получаем

$$\frac{1}{2t_1^2} \left[\frac{3-t_1}{\sqrt{t_1-1}} - \frac{3}{\sqrt{t_1}} \text{Arsh } \sqrt{t_1-1} \right] = 0.$$

Это есть искомый аналитический критерий потери устойчивости для данного случая.

Решая полученное трансцендентное уравнение, находим корень $t_1=1,635$, и наибольшее значение функции $\theta(t_1)$ будет

$$\max \theta = \theta(1,635) = 0,8367,$$

следовательно:

$$\lambda^2 = 9,450 \frac{E}{\sigma_T} (\mu_{кр} + 1) \left(1 - \frac{\nu}{3\mu_{кр}}\right)^3. \quad (46)$$

Точно так же для формы потери устойчивости 3, исходя из выражения для гибкости (36)

$$\lambda^2 = \frac{16\sqrt{2}}{9} \Phi^2(z_1) \frac{E}{\sigma_T} \frac{1}{\sqrt{\mu+1}} \left(\frac{3}{2} \mu \frac{\mu+2}{\mu+1} - \nu \right)^{\frac{3}{2}},$$

получаем критерий потери устойчивости $\frac{d\Phi(z_1)}{dz_1} = 0$, откуда на основании (37)

$$\Phi(z) = \frac{z+2}{z} \sqrt{\frac{z-1}{z}}$$

находим

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{2-z_1}{z_1^3} \sqrt{\frac{z_1}{z_1-1}} = 0.$$

Корень этого уравнения $z_1=2$ дает возможность найти наибольшее значение функции

$$\max \Phi = \Phi(2) = \sqrt{2},$$

следовательно:

$$\lambda^2 = \frac{16}{\sqrt{3}} \cdot \frac{E}{\sigma_T} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_{кр}+1}} \left(\mu_{кр} \frac{\mu_{кр}+2}{\mu_{кр}+1} - \frac{2}{3} \nu \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (47)$$

В формулах (46) и (47) через $\mu_{кр}$ обозначено значение μ , соответствующее критическому значению осевого напряжения σ_0 ; следовательно, на основании (18) имеем

$$\mu_{кр} = \frac{\sigma_T}{\sigma_{кр}} - 1. \quad (48)$$

Отсюда критическое напряжение равно

$$\sigma_{кр} = \frac{\sigma_T}{\mu_{кр}+1}. \quad (49)$$

Аналогичным образом могут быть найдены зависимости между гибкостью λ и критическим напряжением $\sigma_{кр}$ для форм потери устойчивости 4, 5 и 6.

Обобщая полученный результат, можем сказать, что критерий потери устойчивости (45) позволяет исключить вспомогательную переменную s из соотношения (39), и мы получаем

$$\lambda = \sqrt{\frac{E}{\sigma_T}} \varphi(\mu_{кр}, \nu). \quad (50)$$

Функция $\varphi(\mu_{кр}, \nu)$ есть результат подстановки в функцию $f(\mu, \nu, s)$ значения $s=s^*$, которое является корнем уравнения

$$\frac{\partial}{\partial s} f(\mu, \nu, s) = 0.$$

Найденные таким образом соотношения между критическими напряжениями $\sigma_{кр}$, гибкостью λ и относительным эксцентриситетом ν позволяют представить зависимость между указанными величинами в наглядной графической форме. Рассматривая λ , ν , $\sigma_{кр}$ как прямоугольные координаты точки в пространстве трех измерений, мы можем трактовать полученные выше формулы как уравнения некоторой поверхности. В плоской прямоугольной системе координат зависимость между двумя из рассматриваемых величин, например, $\sigma_{кр}$ и λ , при фиксированном значении третьей величины ν изобразится кривой линией. Принимая ряд значений ν , получаем семейство кривых, зависящих от одного параметра. Таким образом строится график $\sigma_{кр}(\lambda)$ зависимости критического напряжения от гибкости для внецентренно сжатого стержня прямоугольного сечения при шарнирном опирании его концов (рис. 23). Каждому значению относительного эксцентриситета соответствует своя кривая на графике. Для случая $\nu=0$ (центрально сжатый стержень) кривая критических напряжений не зависит от формы поперечного сечения стержня и образуется, как было разобрано выше, отрезком прямой $\sigma_k = \sigma_T$ при $\lambda < \lambda_T$ и эйлеровой гиперболой $\sigma_k = \sigma_s = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ при $\lambda > \lambda_T$. Все прочие кривые $\nu > 0$ лежат ниже этой кривой, т. е. наличие эксцентриситета уменьшает величину критических напряжений. Наиболее существенно это снижение в области средних гибкостей при значениях λ близких к λ_T . Так, например, при $\lambda = 90$ и $\nu = 0,2$ по графику можно найти $\sigma_{кр} = 1600 \text{ кг/см}^2$, в то время как при $\nu=0$ имеем $\sigma_{кр} = \sigma_T = 2400 \text{ кг/см}^2$, т. е. наличие эксцентриситета всего лишь в $1/30$ высоты сечения снижает критические напряжения центрального сжатия на $1/3$. Однако влияние эксцентриситета убывает как по мере уменьшения гибкости, так и, особенно сильно, по мере ее увеличения.

Отдельные участки каждой из кривых графика соответствуют различным формам потери устойчивости. Поэтому весьма целесообразно нанести на график $\sigma_{кр}(\lambda)$ граничные кривые, отделяющие эти формы потери устойчивости одну от другой. Этих кривых всего три; они разделяют координатную плоскость на

пять областей соответственно пяти возможным формам потери устойчивости. На графике граничные кривые показаны пунктиром и обозначены буквами α , β и γ

Представляет интерес тот случай, когда критическое состояние стержня совпадает с исчерпанием несущей спо-

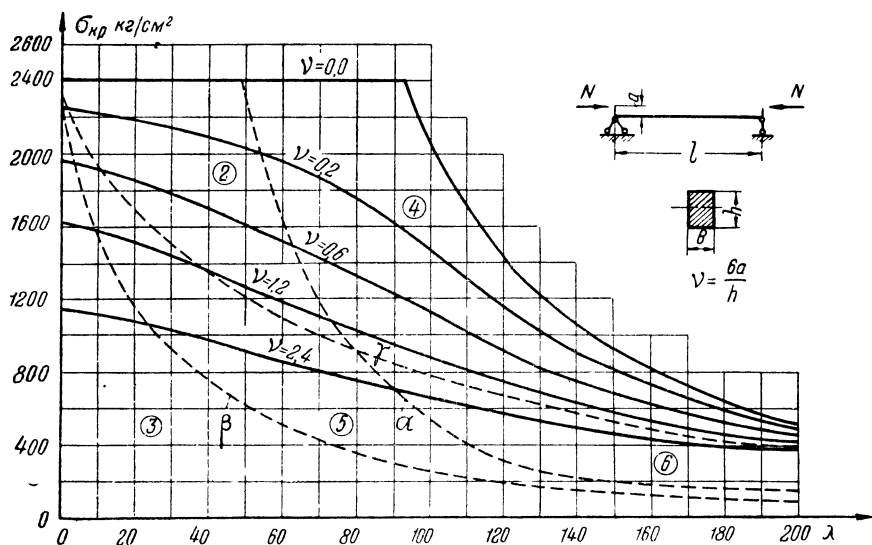


Рис. 23. График $\sigma_{кр}(\lambda)$ для внецентренно сжатого стержня прямоугольного сечения ($E = 2\,100\,000 \text{ кг/см}^2$, $\sigma_T = 2\,400 \text{ кг/см}^2$)

собности сечения. При этом в сечении смыкаются обе зоны текучести — растянутая и сжатая. Анализ показывает, что такое совпадение потери устойчивости с полной пластичностью сечения имеет место при длине стержня $l=0$, следовательно, $\lambda = 0$. Отсюда на основании зависимости (47) находим

$$\nu = \frac{3}{2} \mu_{кр} \frac{\mu_{кр} + 2}{\mu_{кр} + 1}. \quad (51)$$

Таким образом, координатную ось $O\sigma$ можно рассматривать, как четвертую граничную кривую, являющуюся геометрическим местом точек, соответствующих случаю полной пластичности сечения. Определяемые уравнением (51) напряжения являются наивысшим пределом критических напряжений при данной величине эксцентриситета. Обозначая это напряжение символом $\sigma_{к0}$, имеем для вычисления его величины квадратное уравнение

$$\left(\frac{\sigma_{к0}}{\sigma_T} \right)^2 + \frac{2}{3} \nu \left(\frac{\sigma_{к0}}{\sigma_T} \right) - 1 = 0. \quad (52)$$

**§ 20. СЖАТО-ИЗОГНУТЫЙ СТЕРЖЕНЬ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ.
СОСРЕДОТОЧЕННАЯ СИЛА В СЕРЕДИНЕ ПРОЛЕТА.
РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННАЯ НАГРУЗКА**

Рассмотрим шарнирно опертый стержень прямоугольного поперечного сечения, сжатый продольной силой N и нагруженный сосредоточенной силой $P=2\xi N$ в середине пролета (рис. 24). Поместим, как и ранее, начало координат в середине пролета стержня. Изгибающий момент в сечении с абсциссой x равен

$$M = N \left[y + \xi \left(\frac{l}{2} - x \right) \right].$$

Так как в опорном сечении изгибающий момент равен нулю, то примыкающая к опорному сечению ветвь изогнутой оси всегда работает в условиях упругой стадии. Поэтому, в отличие от случая внецентренного сжатия, здесь возможны всего лишь три формы равновесия. Форма равновесия 1 (ветвь 1) определяется упругой работой материала по всей длине стержня. Для формы равновесия 2 (ветви I и II) имеет место образование односторонней текучести в среднем участке длины стержня. Наконец, форма равновесия 3 (ветви I, II и III) характеризуется наличием двусторонней текучести в средней части стержня. Соответственно числу форм равновесия возможны всего лишь две формы потери устойчивости, поскольку при упругой работе сжато-изогнутого стержня потеря устойчивости произойти не может.

Для первой стадии работы (упругое состояние) дифференциальное уравнение имеет вид

$$y'' + \alpha^2 \left[y + \xi \left(\frac{l}{2} - x \right) \right] = 0.$$

Интегрирование этого уравнения производится без труда при посредстве методов, рассмотренных в главе второй.

Дифференциальное уравнение второй стадии (односторонняя текучесть)

$$y'' = - \frac{m^2}{\left[n - y - \xi \left(\frac{l}{2} - x \right) \right]^2}$$

имеет общее решение

$$y = n - \xi \left(\frac{l}{2} - x \right) - B_1^2 t;$$

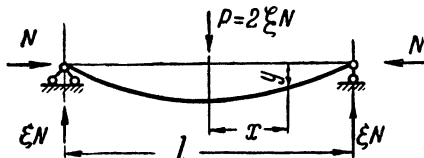


Рис. 24. Шарнирно опертый стержень, сжатый силой N и нагруженный силой $P = 2\xi N$

$$x = \frac{B_1^3}{\sqrt{2m}} \left[\sqrt{t(t-1)} + \operatorname{Arsh} \sqrt{t-1} \right] + B_2,$$

где t — вспомогательная переменная; B_1 и B_2 — постоянные интегрирования.

Наконец, для третьей стадии (двусторонняя текучесть) общее решение дифференциального уравнения

$$y'' = - \frac{v^2}{\sqrt{\omega - y - \xi \left(\frac{l}{2} - x \right)}}$$

выражается при помощи вспомогательной переменной z :

$$y = \omega - \xi \left(\frac{l}{2} - x \right) - C_1^4 z^2;$$

$$x = \frac{2C_1^3}{3v} (2 + z) \sqrt{z - 1} + C_2.$$

Здесь C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.

Основываясь на анализе форм равновесия и используя критерий потери устойчивости (42), получаем искомые соотношения между λ , $\mu_{\text{кр}}$ и ξ для двух возможных форм потери устойчивости.

Построение графика $\sigma_{\text{кр}}(\lambda)$ зависимости критических напряжений от гибкости для ряда фиксированных значений параметра поперечной нагрузки ξ на основе найденных таким образом соотношений не представляет затруднений. На прилагаемом графике (рис. 25) принято $\xi = 0; 0,005; 0,01; 0,05$. Для случая $\xi = 0$ кривая совпадает с графиком $\sigma_{\text{к}}(\lambda)$ при центральном сжатии; прочие кривые при $\xi > 0$ расположены ниже. Особенностью этого графика по сравнению с графиком для внецентренно сжатого стержня (рис. 23) является то обстоятельство, что все кривые исходят из точки $\lambda = 0, \sigma_{\text{кр}} = \sigma_{\text{т}}$. Этот факт объясняется тем, что при уменьшении гибкости стержня убывает не только влияние сжимающей силы, но и величина изгибающего момента от поперечной нагрузки. В пределе, при $\lambda = 0$, имеет место случай центрального сжатия и $\sigma_{\text{к}} = \sigma_{\text{т}}$. Наоборот, для внецентренно сжатого стержня величина опорного момента $M = Na$ не зависит от гибкости, и напряжение изгиба возникает даже и при $\lambda = 0$, поэтому $\sigma_{\text{к}} < \sigma_{\text{т}}$.

На графике (рис. 25) нанесена пунктиром также граничная кривая, отделяющая области двух возможных форм потери устойчивости.

Аналогично рассмотренному случаю может быть получено решение для стержня прямоугольного сечения, сжатого продольной силой N и нагруженного поперечной равномерно распреде-

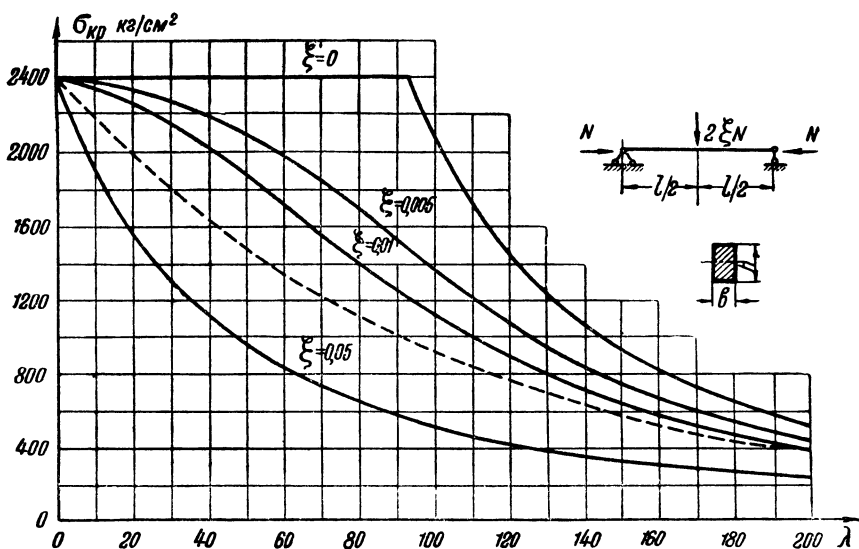


Рис. 25. График $\sigma_{кр}(\lambda)$ для сжато-изогнутого стержня прямоугольного сечения при сосредоточенной силе в середине пролета ($E = 2\,100\,000 \text{ кг/см}^2$, $\sigma_r = 2\,400 \text{ кг/см}^2$)

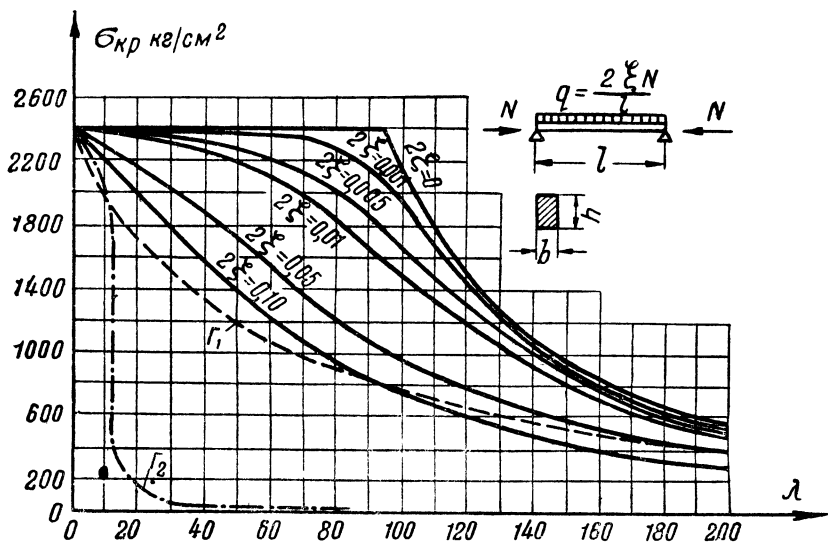


Рис. 26. График $\sigma_{кр}(\lambda)$ для сжато-изогнутого стержня прямоугольного сечения при равномерно распределенной нагрузке ($E = 2\,100\,000 \text{ кг/см}^2$, $\sigma_r = 2\,400 \text{ кг/см}^2$)

ленной нагрузкой, интенсивность которой пропорциональна сжимающей силе

$$q = \frac{2\xi N}{l}.$$

Для этой задачи возможны три формы равновесия и две формы потери устойчивости, точно так же, как и для случая сосредоточенной силы в середине пролета. График $\sigma_{кр}(\lambda)$ показывает, что все кривые исходят из точки $\lambda = 0$, $\sigma_{кр} = \sigma_T$ (рис. 26). Граничная кривая Γ_1 отделяет области обеих возможных форм потери устойчивости. Ниже кривой Γ_2 расположены точки, соответствующие состояниям потери устойчивости, при которых относительное удлинение наиболее напряженного волокна превышает 1%.

§ 21. ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ВНЕЦЕНТРЕННО СЖАТОГО СТЕРЖНЯ

Значительное упрощение выкладок и вычислений дает приближенный метод решения задач устойчивости внецентренно сжатого упруго-пластического стержня, основанный на замене фактической формы изогнутой оси некоторой простой кривой. Благодаря такой замене отпадает необходимость в интегрировании дифференциального уравнения изгиба и трудоемкость вычислений существенно снижается. Если кривая, аппроксимирующая изогнутую ось стержня, представляется функцией, имеющей только один параметр — величину прогиба в середине пролета, то равновесное состояние стержня вполне определяется теми зависимостями между внешними и внутренними силами, которые имеют место в среднем, наиболее напряженном сечении стержня. Задача сводится в этом случае к исследованию системы с одной степенью свободы.

Наиболее простые результаты получаются, если принять в качестве изогнутой оси внецентренно сжатого шарнирно опертого стержня полуволну синусоиды, уравнение которой имеет вид

$$y = y_0 \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (53)$$

Абсцисса x отсчитывается от опорного сечения стержня.

Покажем применение приближенного метода к исследованию внецентренно сжатого стержня прямоугольного сечения. Сравнение результатов приближенного решения с данными, полученными выше на основе точного решения, даст возможность оценить погрешность приближенного метода.

Для случая односторонней текучести в середине пролета имеем дифференциальное уравнение

$$y'' = - \frac{n \cdot^2}{(n - a - y)^2}.$$

Подставляя значение y по формуле (53) и полагая затем $x = \frac{l}{2}$ и $y = y_0$ получаем

$$l^2 = \frac{\pi^2}{m^2} y_0 (n - a - y_0)^2. \quad (54)$$

Это уравнение определяет равновесную форму рассматриваемого стержня. Для получения соотношений, характеризующих состояние потери устойчивости, необходимо при помощи условия

$$\frac{\partial l}{\partial y_0} = 0 \quad (55)$$

исключить y_0 из выражения (54).

Условие (55) дает возможность определить величину прогиба в критическом состоянии

$$y_{кр} = \frac{n - a}{3}.$$

Подставляя это значение в (54) и переходя к величинам нулевой размерности, получаем

$$\lambda^2 = \pi^2 \frac{E}{\sigma_T} (\mu_{кр} + 1) \left(1 - \frac{\nu}{3\mu_{кр}} \right)^3. \quad (56)$$

Аналогично этому для случая двусторонней текучести исходим из дифференциального уравнения

$$y'' = - \frac{v^2}{\sqrt{w - a - y}},$$

подставляем значение y по формуле (53), полагаем $x = \frac{l}{2}$ и $y = y_0$. Равновесное состояние определяется зависимостью

$$l^2 = \frac{\pi^2}{v^2} y_0 \sqrt{w - a - y_0}. \quad (57)$$

Используя условие (55), находим

$$y_{кр} = \frac{2}{3} (w - a),$$

следовательно

$$\lambda^2 = \pi^2 \frac{E}{\sigma_T} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_{кр} + 1}} \left(\mu_{кр} \frac{\mu_{кр} + 2}{\mu_{кр} + 1} - \frac{2}{3} \nu \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (58)$$

Сравнение полученных соотношений (56) и (58) с результатами точного решения (46) и (47) показывает, что приближенное решение устанавливает вполне точную структуру формул для гибкости. Отличие заключается только в величине численного коэффициента, который в приближенном решении получил-

ся равным $\pi^2=9,87$ в обоих случаях, в то время как точное решение дает в первом случае 9,45 и во втором случае 9,23. Отсюда следует, что приближенное решение дает несколько преувеличенное значение гибкости, что идет не в запас.

Однако погрешность при вычислении λ^2 в худшем случае (двусторонняя текучесть) составляет 7%, следовательно, при вычислении λ ошибка не превышает 3,5%.

Область применения уравнений (56) и (57) разграничивается кривой

$$\lambda^2 = \pi^2 \frac{E}{\sigma_T} \cdot \frac{\mu_{кр}^3}{(\mu_{кр} + 1)^2}.$$

Ценность изложенного выше приближенного метода¹ решения задачи заключается в возможности его обобщения на случай произвольной формы поперечного сечения стержня. Благодаря этому становится возможным получить простое приближенное решение для случаев, точное решение которых при помощи интегрирования дифференциальных уравнений встречает непреодолимые трудности.

§ 22. УСТОЙЧИВОСТЬ ВНЕЦЕНТРЕННО СЖАТОГО СТЕРЖНЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Потеря устойчивости сжато-изогнутого стержня возможна, как было выше установлено, при второй (односторонняя текучесть) или же при третьей стадии упруго-пластической работы

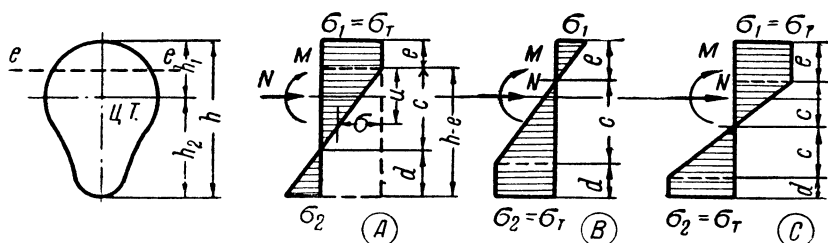


Рис. 27. Три состояния упруго-пластической работы сечения произвольной формы

материала. В соответствии с этим будем различать три возможных состояния в сечении стержня, из которых первые два относятся ко второй стадии работы материала, а третье — к третьей стадии. Рассмотрим внецентренно сжатый стержень произвольной формы поперечного сечения². Состояние А (рис. 27,А) ха-

¹ См. сноску ⁵ на стр. 17. В книге И. Я. Штаермана и А. А. Пиковского «Основы теории устойчивости строительных конструкций» (Госстройиздат, 1939) рассмотрен только случай односторонней текучести.

² Решение принадлежит К. Ежеку.

рактизуется односторонней текучестью на сжатом от изгиба волокне

$$\sigma_1 = \sigma_T, \quad \varepsilon_1 > \varepsilon_T; \quad \sigma_2 < \sigma_T, \quad \varepsilon_2 < \varepsilon_T.$$

В состоянии *B* текучесть достигается сначала на растянутом от изгиба волокне (рис. 27, *B*)

$$\sigma_1 < \sigma_T, \quad \varepsilon_1 < \varepsilon_T; \quad \sigma_2 = \sigma_T, \quad \varepsilon_2 > \varepsilon_T.$$

Это состояние может иметь место только для резко несимметричных сечений, когда момент сопротивления сжатого от изгиба волокна $W_1 = \frac{J}{h_1}$ значительно превосходит по величине момент сопротивления растянутого от изгиба волокна $W_2 = \frac{J}{h_2}$. Наконец, состояние *C* характеризуется двусторонней текучестью (рис. 27, *C*):

$$\sigma_1 = \sigma_T, \quad \varepsilon_1 > \varepsilon_T; \quad \sigma_2 = \sigma_T, \quad \varepsilon_2 > \varepsilon_T.$$

Применяя изложенный в предыдущем параграфе приближенный метод, получаем критическую гибкость для состояния *A*:

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{кр}} \left[1 - \frac{\nu}{\mu_{кр}} + C_1 \left(\frac{\nu}{\mu_{кр}} \right)^2 + C_2 \left(\frac{\nu}{\mu_{кр}} \right)^3 + \dots \right]. \quad (59)$$

Здесь относительный эксцентриситет равен

$$\nu = \frac{a}{k} = \frac{aF}{W_1},$$

а коэффициенты C_1, C_2, \dots зависят только лишь от формы поперечного сечения.

Для состояния *B* критическая гибкость равна

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{кр}} \left[1 - \frac{W_1}{W_2} \cdot \frac{\nu}{\mu_{кр} + 2} + C_1 \left(\frac{W_1}{W_2} \cdot \frac{\nu}{\mu_{кр} + 2} \right)^2 + C_2 \left(\frac{W_1}{W_2} \cdot \frac{\nu}{\mu_{кр} + 2} \right)^3 + \dots \right]. \quad (60)$$

Опасное напряжение является нижней границей критического напряжения. Если фибровое напряжение достигает предела текучести со стороны сжатого волокна, то имеем

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{оп}} \left(1 - \frac{\nu \sigma_{оп}}{\sigma_T - \sigma_{оп}} \right). \quad (61)$$

Гибкость

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{оп}} \left(1 - \frac{W_1}{W_2} \cdot \frac{\nu \sigma_{оп}}{\sigma_T + \sigma_{оп}} \right) \quad (62)$$

соответствует случаю, когда фибровое напряжение достигает предела текучести со стороны растянутого волокна.

В особом случае, когда предел текучести достигается одновременно как на вогнутой, так и на выпуклой стороне сечения, имеем

$$\lambda_r^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_T} \left[1 - \frac{W_1 - W_2}{2W_2} \sqrt{\frac{W_1 + W_2}{W_1 - W_2}} \right] \quad (63)$$

Это есть уравнение граничной гибкости λ_r . Если гибкость стержня $\lambda < \lambda_r$, то предел текучести достигается сначала на сжатом от изгиба волокне (состояние А); если же $\lambda > \lambda_r$, то сначала образуется зона текучести с выпуклой стороны сечения (состояние В).

Анализ состояния С (двусторонняя текучесть) приводит к несколько более сложным зависимостям. Мы ограничиваемся здесь рассмотрением предельного случая, при котором имеет место полная пластичность сечения

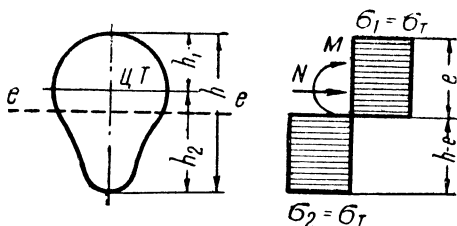


Рис. 28. Полная пластичность сечения произвольной формы

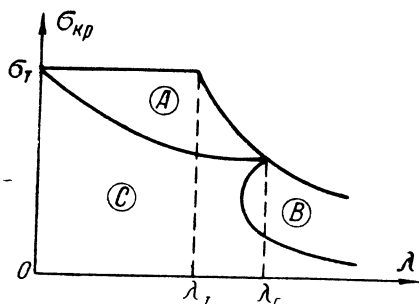


Рис. 29. Области графика $\sigma_{кр}(\lambda)$, соответствующие трем состояниям потери устойчивости внецентренно сжатого стержня при поперечном сечении произвольной формы

стичность сечения (рис. 28). В этом случае гибкость $\lambda = 0$ и прогиб $y = 0$. Соответствующее осевое напряжение является для стержня наивысшим при данной величине эксцентриситета a . Обозначая это напряжение символом $\sigma_{ко}$, получаем

$$\sigma_{ко} = \frac{\sigma_T}{F} (F_1 - F_2).$$

Здесь F_1 — сжатая часть площади поперечного сечения; F_2 — растянутая часть этой площади.

Схематический график (рис. 29) показывает распределение координатной плоскости $\lambda O \sigma_{кр}$ на области, соответствующие трем рассмотренным состояниям А, В, и С. Точка смыкания всех трех областей расположена на эйлеровой гиперболе.

Для приближенного вычисления критических напряжений при любой форме поперечного сечения следует основываться на

формуле (59), где должны быть известны коэффициенты C_1, C_2, \dots . Эта формула может быть представлена также в виде

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{кр}} \left(1 - m_1 \frac{\nu}{\mu_{кр}} \right) \left(1 - m_2 \frac{\nu}{\mu_{кр}} \right), \quad (64)$$

где m_1 и m_2 — коэффициенты, зависящие от формы поперечного сечения. Для случая прямоугольного поперечного сечения, как нетрудно убедиться, $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}$. Кривая опасных напряжений характеризуется значениями коэффициентов $m_1=1$ и $m_2=0$. Если для некоторых форм поперечных сечений кривая критических напряжений лежит между указанными выше кривыми, то для этих форм

$$m_1 + m_2 = 1$$

Полагая $\lambda = 0$ и $m_1 > m_2$, находим для напряжений, соответствующих образованию пластического шарнира,

$$\sigma_{ко} = \frac{\sigma_T}{1 + m_1 \nu}.$$

Формула (64) сохраняет силу также и в тех случаях, когда кривая критических напряжений лежит выше соответствующей кривой для прямоугольного поперечного сечения. В этом случае $m_1 + m_2 < 1$. Формула (64) справедлива для всех форм поперечных сечений, для которых $W_1 \leq W_2$, следовательно, для двутаврового, таврового (изгиб в сторону полки), крестового и прямоугольного профилей, кроме того, ограниченно применима и в случае $W_1 > W_2$, следовательно, для таврового профиля (изгиб в сторону стенки). В этом последнем случае область действия формулы (64) определяется неравенством

$$\frac{W_1 - W_2}{W_1 + W_2} \leq \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_T} \leq 1.$$

В случае если последнее неравенство не удовлетворяется, а, наоборот:

$$0 \leq \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_T} \leq \frac{W_1 - W_2}{W_1 + W_2},$$

то предел текучести достигается сначала на растянутом от изгиба волокне. В этом случае вместо соотношения (64) для определения критического напряжения служит формула

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{кр}} \left(1 - m_1 \frac{W_1}{W_2} \cdot \frac{\nu}{\mu_{кр} + 2} \right) \left(1 - m_2 \frac{W_1}{W_2} \cdot \frac{\nu}{\mu_{кр} + 2} \right), \quad (65)$$

которая естественно вытекает из общей зависимости (60).

При $m_1=1, m_2=0$ получается формула (62) для опасного напряжения. При $\lambda = 0$ находим напряжение

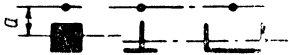
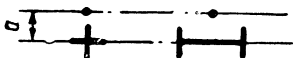
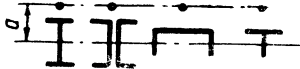
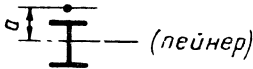
$$\sigma_{ко} = \frac{W_2 \sigma_T}{m_1 \nu W_1 - W_2},$$

соответствующее образованию пластического шарнира.

Формулы (64) и (65) дают возможность вычислить критическое напряжение для важнейших профилей. Значения коэффициентов m_1 и m_2 приведены в табл. 6. Наибольшая ошибка при пользовании этими формулами не превышает 8%, причем критическое напряжение получается в этом случае ниже точных значений, т. е. приближенный расчет идет в запас.

Таблица 6

Значения коэффициентов m_1 и m_2 в формулах
(64) и (65)

Форма поперечного сечения	Коэффициенты	
	m_1	m_2
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$
	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
 (нейнер)	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

СТАЛЬНОЙ СЖАТЫЙ И СЖАТО-ИЗОГНУТЫЙ СТЕРЖЕНЬ

§ 23. МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СТРОИТЕЛЬНОЙ СТАЛИ

Ограничимся рассмотрением только строительной стали. Стальные конструкции имеют большое распространение во многих областях народного хозяйства—промышленности, транспорте и пр. С другой стороны, именно для стальных конструкций вопросы устойчивости сжатых и сжато-изогнутых стержней име-

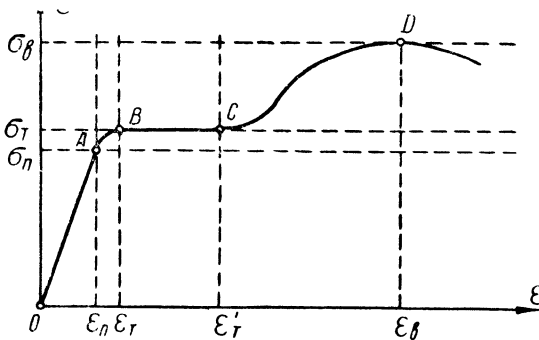


Рис. 30. График $\sigma(\epsilon)$ для строительной стали

ют особо важное значение. Вследствие высоких допускаемых напряжений элементы стальных конструкций являются более гибкими, чем элементы, выполненные из железобетона или дерева. С возрастанием же гибкости несущая способность конструкции все в большей и большей степени определяется не прочностью элементов, а устойчивостью их.

Для того чтобы установить возможность распространения полученных в первых трех главах результатов на стальные стержни, следует обратиться к рассмотрению графика $\sigma(\epsilon)$ для стали.

График $\sigma(\epsilon)$ для стали (рис. 30) может быть получен экспериментальным путем на самозаписывающем приборе разрыв-

ной машины при испытании образцов на разрыв. До некоторой точки A график представляет собой прямую линию, исходящую из начала координат O . В этой области применим закон Гука, устанавливающий линейную зависимость между напряжением и относительным удлинением, а потому найденные в первых двух главах соотношения имеют здесь полную силу. Напряжение, соответствующее точке A , ограничивающей стадию упругой работы стали, называется *пределом пропорциональности* σ_n ; это есть наивысшее напряжение, при котором еще имеет место пропорциональность между напряжением и удлинением. Удлинение, соответствующее пределу пропорциональности, обозначается ϵ_n . Эти две величины связаны друг с другом посредством модуля упругости $\sigma_n = \epsilon_n E$.

С пределом пропорциональности почти совпадает *предел упругости*, представляющий собой наивысшее напряжение, при котором не возникают остаточные деформации после разгрузки.

Предел пропорциональности σ_n соединяется на графике с пределом текучести σ_T плавной переходной кривой AB . В этой стадии работы стали напряжение увеличивается по мере роста деформации, но между этими двумя величинами нет уже линейной зависимости, рост напряжений запаздывает. Если испытуемый стержень нагрузить так, что напряжение σ окажется между пределом пропорциональности и пределом текучести $\sigma_n < \sigma < \sigma_T$ и затем снять нагрузку, то часть полученного стержнем удлинения, так называемое остаточное удлинение, сохраняется.

Другая часть полученного удлинения, упругое удлинение, после снятия нагрузки исчезает. Зависимость $\sigma(\epsilon)$ при разгрузке характеризуется прямой линией (рис. 31). Модуль упругости при разгрузке по своей величине очень близок к модулю E , т. е. прямая PQ на графике почти параллельна прямой OA .

На графике (рис. 30) более или менее четко выражена площадка текучести, т. е. горизонтальная прямая BC , соответствующая стадии пластической работы стали.

Относительное удлинение, соответствующее началу площадки текучести (точка B), обозначим ϵ_T , а относительное удлинение, соответствующее концу этой площадки, обозначим ϵ'_T . Возрастание удлинений в интервале $\epsilon_T < \epsilon < \epsilon'_T$ происходит при постоянном напряжении σ_T .

Характерным для стали является наличие стадии упрочне-

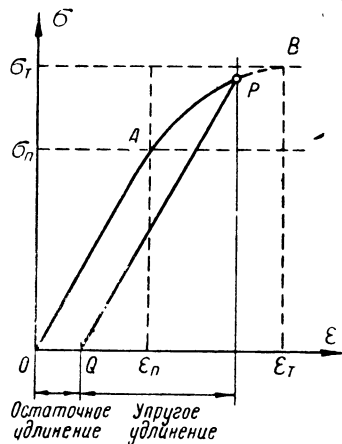


Рис. 31. График $\sigma(\epsilon)$ при разгрузке

Таблица 7

Механические свойства основных строительных сталей

Точка гра- фика (рис. 30)	Характеристика точки	Напряжение в кг/см ²					обозначение	Удлинения в %				
		сталь марки						обозначение	сталь марки			
		Ст. 0	Ст. 2	Ст. 3	НЛ1	НЛ2			Ст. 0	Ст. 2	Ст. 3	НЛ1
A	Предел пропорциональности	$\sigma_{\text{п}}$ (1 500)	(1 800)	(1 900)	(2 400)	(2 700)	$\epsilon_{\text{п}}$	(0,07)	(0,09)	(0,09)	(0,11)	(0,13)
B	Начало площадки текучести	$\sigma_{\text{Г}}$ 1 900	2 200	2 400	3 000	3 400	$\epsilon_{\text{Г}}$	—	—	—	—	—
C	Конец площадки текучести и начало стадии упрочнения	$\sigma_{\text{Г}}$ 1 900	2 200	2 400	3 000	3 400	$\epsilon'_{\text{Г}}$	—	—	—	—	—
D	Временное сопротивление (предел прочности)	$\sigma_{\text{в}}$ 3 200	3 400	3 800	4 200	4 800	$\epsilon_{\text{в}}$	18	26	21	20	18

Примечания. 1. Малоуглеродистые стали Ст. 0, Ст. 2, Ст. 3—по ГОСТ 380-50. Низколегированные стали НЛ1 и НЛ2—по ГОСТ 5058-49.

2. В таблице приведены наименьшие нормированные значения механических показателей.

3. Предел пропорциональности не нормируется. Принято $\sigma_{\text{п}} = 0,8\sigma_{\text{Г}}$ с округлением.

4. Модуль упругости для всех марок сталей $E = 2100000 \text{ кгс/см}^2$.

ния, которой на графике $\sigma(\epsilon)$ соответствует подъем кривой CD , начинающийся непосредственно за площадкой текучести. Сталь вновь приобретает способность сопротивления внешней нагрузке. Эта способность исчерпывается в точке D при напряжении σ_v , которое называется временным сопротивлением или пределом прочности. Кривая на графике резко падает вниз и обрывается. Образец разрушается.

Относительное удлинение при разрушении образца называют временным удлинением и обозначают ϵ_v .

Следует заметить, что на графике (рис. 30) по оси ординат отложены условные напряжения, подсчитанные в предположении, что площадь поперечного сечения образца остается постоянной.

Если подвергнуть испытанию на сжатие очень короткий образец из стали, для которого возможность потери устойчивости под влиянием сжимающих сил исключена, то полученный таким путем график $\sigma(\epsilon)$ при сжатии по своему очертанию будет мало отличаться от рассмотренного графика (рис. 30) при растяжении. Все характерные точки графика сохраняют свой смысл за исключением лишь временного сопротивления (точка D). В случае сжатия кривая графика $\sigma(\epsilon)$ в стадии упрочнения идет все время вверх, и понятие временного сопротивления не имеет здесь смысла. Что касается численной величины механических постоянных, то в случае сжатия их можно принять такими же, как и при растяжении.

В табл. 7 приведены значения основных механических показателей, которыми должны обладать согласно государственным стандартам строительные стали, наиболее часто применяемые в СССР. Государственными стандартами устанавливаются наименьшие значения механических показателей, которые являются браковочным минимумом¹. Модуль упругости для всех марок стали принимается одинаковым. Наиболее употребительной в строительстве маркой стали является Ст. 3. Для листовых конструкций (и для заклепок) применяется Ст. 2. Для нерасчетных элементов конструкции применяется Ст. 0. Низколегированная сталь НЛ2 употребляется для ответственных конструкций, требующих повышенной прочности. Сталь НЛ1 находит применение для листовых (котельных) конструкций; употребляется также и для заклепок.

Так как применимость закона Гука ограничивается пределом пропорциональности, то формула Эйлера

$$N_k = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}, \quad (1)$$

¹ До 1950 г. прочность стальных конструкций оценивалась средним расчетным пределом текучести, который принимался на 10% выше браковочного минимума. С введением ГОСТ 380-50 браковочный минимум был повышен с той целью, чтобы расчет конструкций производить по установленным ГОСТ показателям.

выведенная в предположении вполне упругой работы материала, сохраняет свою силу для стали только в том случае, если подсчитанное по этой формуле критическое напряжение

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (2)$$

не превосходит предела пропорциональности σ_n . Отсюда находим наименьшую гибкость

$$\lambda_n = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_n}}, \quad (3)$$

при которой формула Эйлера еще действительна. Эту гибкость будем называть *граничной* гибкостью. Если гибкость стержня меньше граничной

$$\lambda < \lambda_n,$$

то формула Эйлера неприменима, и явление потери устойчивости происходит в неупругой области. Для Ст. 3 предел пропорциональности

$$\sigma_n = 0,8 \cdot 2400 \approx 1900 \text{ кг/см}^2,$$

откуда

$$\lambda_n = 3,1416 \sqrt{\frac{2100000}{1900}} \approx 104,4.$$

Следовательно, формула Эйлера справедлива только для таких стержней, гибкость которых превосходит 104.

Аналогично для стали НЛ2 имеем

$$\sigma_n = 0,8 \cdot 3400 \approx 2700 \text{ кг/см}^2,$$

следовательно, граничная гибкость равна

$$\lambda_n = 3,1416 \sqrt{\frac{2100000}{2700}} \approx 87,8.$$

В главе третьей устойчивость сжатого и сжато-изогнутого стержня была исследована на основе идеализированного графика $\sigma(\varepsilon)$, состоящего из двух участков — наклонной прямой и неограниченной площадки текучести. Такой идеализированный график отличается от фактического графика $\sigma(\varepsilon)$ отсутствием переходной кривой AB , а также отсутствием стадии упрочнения (участок CD на рис. 30).

В настоящей главе рассматривается работа сжатого и сжато-изогнутого стального стержня, причем в основу исследования положен фактический график $\sigma(\varepsilon)$. Помимо точных методов исследования, рассматриваются также и приближенные.

§ 24. УСТОЙЧИВОСТЬ ЦЕНТРАЛЬНО СЖАТОГО СТЕРЖНЯ. ТЕОРИЯ ЭНГЕССЕРА — ЯСИНСКОГО

Спустя 100 лет после того, как Эйлер исследовал устойчивость центрально сжатого упругого стержня, было замечено, что формула Эйлера справедлива только в том случае, если вычисленные по этой формуле напряжения не превышают предела пропорциональности.

Первая попытка распространить теорию устойчивости центрально сжатого стержня на неупругую область была предпринята в конце прошлого столетия Ф. Энгессером. Первоначально Энгессер предложил в формуле Эйлера для критических напряжений $\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ вместо модуля упругости E подставить переменный модуль $E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$, характеризующий зависимость между удлинением и напряжением в данной точке графика $\sigma(\varepsilon)$. Од-

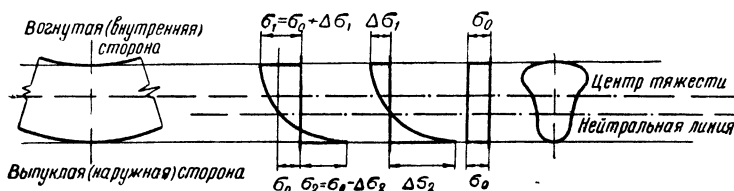


Рис. 32. Эпюра напряжений в сечении стержня при воздействии сжимающей силы и момента

нако Ф. С. Ясинским было замечено, что на выпуклой стороне стержня, где имеет место уменьшение сжимающих напряжений вследствие изгиба, зависимость между удлинением и напряжением определяется постоянным модулем упругости E , так как разгрузка происходит в соответствии с линейным законом Гука. Ф. С. Ясинский исправил теорию Энгессера путем учета двух разных модулей в зонах нагрузки и разгрузки¹.

Введем обозначения, относящиеся к эпюре напряжений, возникающих от сжимающей силы N и изгибающего момента M в поперечном сечении выпучивающегося стержня (рис. 32). Будем называть осевым напряжением σ_0 равномерно распределенное по всей площади поперечного сечения F напряжение от продольной силы $\sigma_0 = \frac{N}{F}$. Фибровыми напряжениями будут: σ_1 —напряжение на вогнутой (внутренней) стороне стержня, которое является всегда сжимающим, и σ_2 —на выпуклой (наружной) стороне, которое вследствие изгиба может оказаться растягивающим. Условимся приписывать величине σ_2 знак плюс (+) в случае сжатия и знак минус (—) — в случае растяжения.

¹ См. Введение, стр. 16 и след.

Рассматриваемую эпюру напряжений можно получить путем наложения двух эпюр, одна из которых является прямоугольником с ординатой σ_0 и представляет собой эпюру напряжений от сжатия, в то время как вторая эпюра, в общем случае криволинейная, представляет собой эпюру напряжений от изгиба. Напряжение от изгиба на вогнутой стороне будем обозначать $\Delta\sigma_1$, а напряжение от изгиба на выпуклой стороне, которое является всегда растягивающим, будем обозначать $\Delta\sigma_2$, понимая под этим символом абсолютную величину напряжения.

Фибровые напряжения при помощи напряжения сжатия и напряжений изгиба выражаются следующим образом:

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \Delta\sigma_1; \quad \sigma_2 = \sigma_0 - \Delta\sigma_2.$$

Основные положения теории Энгессера — Ясинского сводятся к следующему.

Рассмотрим равновесие слегка изогнувшегося стержня, предполагая, что осевое напряжение σ_0 превосходит предел пропорциональности σ_n . Пусть осевому напряжению σ_0 соответствует некоторая точка P в неупругой области графика $\sigma(\epsilon)$. Возникающие вследствие изгиба напряжения распределяются по сечению следующим образом (рис. 33). На вогнутой стороне стержня происходит увеличение сжимающих напряжений, соответствующий участок эпюры характеризуется криволинейным отрезком PP_1 графика $\sigma(\epsilon)$. Зависимость между удлинениями и напряжениями на этом участке не является линейной. На выпуклой стороне стержня имеет место уменьшение сжимающих напряжений, которые распределяются по закону прямой линии на всей длине зоны разгрузки.

Модуль упругости при разгрузке представляет собой тангенс угла наклона прямой линии PP_2 к оси OE :

$$E_2 = \operatorname{tg} \theta_2.$$

С достаточной степенью точности можно считать, что разгрузка происходит при первоначальном модуле упругости, т. е. что

$$E_2 \approx E = \operatorname{tg} \theta.$$

Задаваясь каким-либо произвольным значением относительного удлинения ϵ_1 крайнего волокна вогнутой стороны стержня, возникающим вследствие изгиба, мы можем найти соответствующее удлинение крайнего волокна выпуклой стороны стержня ϵ_2 , если примем во внимание, что по условию равновесия общий объем эпюры напряжений от изгиба равен нулю, в то время как продольная сила уравнивается напряжением σ_0 , равномерно распределенным по сечению. На графике $\sigma(\epsilon)$ напряжения, возникающие вследствие изгиба, заштрихованы (рис. 33).

Для того чтобы иметь возможность полученную таким образом на графике $\sigma(\epsilon)$ эпюру напряжений перенести на попереч-

ное сечение стержня, примем, что гипотеза Бернулли о сохранении плоскими сечениями своей плоской формы при изгибе имеет силу также и в неупругой области. Тогда, если обозначить через h_1 и h_2 длины зон соответственно сжатия и растяжения при изгибе, положение нейтральной оси определяется из условий

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}; \quad h_1 + h_2 = h,$$

где h — высота сечения.

При этом эпюра напряжений на графике $\sigma(\varepsilon)$ сохраняет свою форму и на поперечном сечении стержня, только величина $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ преобразуется в высоту сечения h .

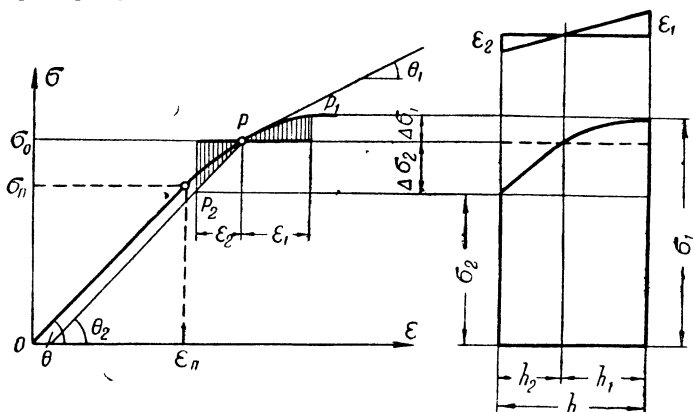


Рис. 33. Распределение напряжений по сечению изогнувшегося центрально сжатого стержня в соответствии с графиком $\sigma(\varepsilon)$

При изучении условий потери устойчивости центрально сжатого стержня достаточно рассмотреть только первый момент изгиба, когда деформации стержня еще весьма малы. В случае малых ε_1 и $\Delta\sigma_1$ криволинейный отрезок эпюры напряжений PP_1 будет мало отличаться от прямой. В пределе, при бесконечно малых ε_1 и $\Delta\sigma_1$, эпюра напряжений на этом участке ограничена касательной к графику $\sigma(\varepsilon)$ в точке P . Деформации от изгиба характеризуются, таким образом, касательным модулем при сжатии:

$$E_1 = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \operatorname{tg} \theta_1$$

и модулем упругости при растяжении

$$E_2 = \operatorname{tg} \theta_2 \approx E.$$

Эпюра напряжений от изгиба для центрально сжатого стержня в момент потери устойчивости на основе принятых допущений имеет такой же вид, как в случае изгиба стержня, материал

которого имеет разные модули упругости при сжатии и растяжении (рис. 34). Примем, что вследствие малости прогибов радиус кривизны при изгибе ρ , который является весьма большим, может измеряться как расстояние от центра кривизны до нейтральной оси сечения, а не до центра тяжести сечения. Тогда напряжение от изгиба легко выразить через модули упругости и радиус кривизны

$$\Delta\sigma_1 = E_1 \frac{h_1}{\rho}; \quad \Delta\sigma_2 = E_2 \frac{h_2}{\rho}.$$

Условие равновесия, заключающееся в равенстве нулю моментов сил, действующих на сечение, имеет вид

$$M_1 + \frac{\Delta\sigma_1}{h_1} J_1 + \frac{\Delta\sigma_2}{h_2} J_2 = 0,$$

где M — внешний момент;

J_1 и J_2 — моменты инерции соответственно сжатой и растянутой зон сечения относительно нейтральной оси.

Заменяя $\Delta\sigma_1$ и $\Delta\sigma_2$ их выражениями через ρ , E_1 и E_2 , находим

$$M + \frac{E_1 J_1 + E_2 J_2}{\rho} = 0.$$

Отсюда, принимая, как и всегда до сих пор, приближенную зависимость

$$\frac{1}{\rho} \approx y'',$$

получаем дифференциальное уравнение изгиба

$$T J y'' + M = 0, \quad (4)$$

где *обобщенный модуль упругости*

$$T = \frac{E_1 J_1 + E_2 J_2}{J} \quad (5)$$

зависит от модулей E_1 , E_2 и моментов инерции J_1 , J_2 сжатой и растянутой зон сечения. Момент инерции

всего поперечного сечения J вычисляется относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения.

Второе условие равновесия

$$E_1 S_1 = E_2 S_2 \quad (6)$$

дает возможность установить положение нейтральной оси. Здесь S_1 и S_2 — статические моменты площадей соответственно сжатой и растянутой зон.

Величина обобщенного модуля T зависит не только от E_1 и E_2 , но и от формы поперечного сечения стержня.

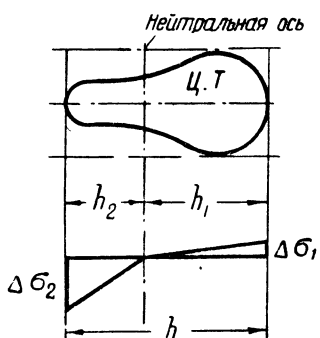


Рис. 34. Эпюра напряжений от изгиба для центрально сжатого стержня в момент потери устойчивости

Можно принять, что обобщенный модуль связан с модулем упругости соотношением

$$T = \tau E, \quad (7)$$

где коэффициент обобщенного модуля τ также зависит от формы поперечного сечения стержня.

Уравнение (4) по своей структуре полностью совпадает с дифференциальным уравнением для центрально сжатого стержня, работающего в условиях упругой стадии. Для стержня постоянного поперечного сечения касательный модуль

$$E_1 = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$$

зависит только от осевого напряжения и потому имеет постоянное значение по всей длине стержня.

Интегрирование дифференциального уравнения (4) приводит к результатам, полностью совпадающим с результатами исследования устойчивости центрально сжатого абсолютно упругого стержня. В качестве формы равновесия получается для шарнирно опертого стержня полуволна синусоиды. Уравнение изогнутой оси имеет вид

$$y = y_0 \sin \frac{\pi x}{l},$$

где абсцисса x измеряется от опорного сечения;

l — длина стержня;

y_0 — максимальный прогиб в середине пролета, величина которого остается существенно неопределенной.

Условие существования отличного от $y = 0$ решения приводит к формуле для критической силы

$$N_k = \frac{\pi^2 T}{l^2} = \frac{\pi^2 F \tau}{l^2}, \quad (8)$$

которая получается из формулы Эйлера, если вместо модуля упругости E поставить обобщенный модуль T . Отсюда следует, что величина критических напряжений в неупругой области

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 T}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 E \tau}{\lambda^2} \quad (9)$$

зависит от формы поперечного сечения стержня.

В простейшем случае прямоугольного поперечного сечения с шириной b положение нейтральной оси определяется при помощи (6) следующим образом:

$$h_1 = \frac{\sqrt{E_2}}{\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2}} h; \quad h_2 = \frac{\sqrt{E_1}}{\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2}} h.$$

Отсюда находим моменты инерции сжатой и растянутой зон

$$J_1 = \frac{bh^3}{3} \cdot \frac{E_2 \sqrt{E_2}}{(\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2})^3}; \quad J_2 = \frac{bh^3}{3} \cdot \frac{E_1 \sqrt{E_1}}{(\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2})^3}.$$

Обобщенный модуль для прямоугольного сечения равен

$$T = \frac{4E_1 E_2}{(\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2})^2}. \quad (10)$$

Как уже указывалось, можно принять $E_2 = E$. Тогда коэффициент обобщенного модуля записывается в виде

$$\tau = \frac{4}{\left(\sqrt{\frac{E}{E_1}} + 1\right)^2}. \quad (11)$$

Вычисление критических напряжений удобно вести в такой последовательности. Задаемся некоторым значением σ_k и находим соответствующую величину обобщенного модуля по формулам (5) и (6) или для прямоугольного сечения — по формуле (10). Неизвестная гибкость стержня, при которой выбранное осевое напряжение оказывается критическим, находится из соотношения (9):

$$\lambda = \pi \sqrt{\frac{T}{\sigma_k}}. \quad (12)$$

§ 25. КРИТИЧЕСКОЕ НАПРЯЖЕНИЕ ДЛЯ ЦЕНТРАЛЬНО СЖАТОГО СТЕРЖНЯ

Основные выводы теории Энгессера — Ясинского сводятся к следующему. В неупругой области сжатый стальной стержень может потерять устойчивость аналогично тому, как это происходит в упругой области. Однако при этом критическое напряжение оказывается ниже того, которое может быть вычислено по формуле Эйлера. Величина критического напряжения зависит от формы поперечного сечения стержня, но влияние этого фактора, как показывают вычисления, не столь значительно. Поэтому достаточно точные результаты для практических целей дает исследование устойчивости стержня прямоугольного поперечного сечения.

Если исключить влияние формы поперечного сечения, то величина критического напряжения окажется функцией только лишь гибкости λ . Задача сводится к разысканию зависимости критического напряжения σ_k от гибкости λ .

В опытах Кáрманa применялась сталь, имеющая:

модуль упругости	2 170 000	кг/см ²
предел прочности	6 800	"
" текучности	3 250	"
" пропорциональности	2 600	"

Из опытов с разгрузкой было найдено $E_2=2\,100\,000\text{ кг/см}^2$. Величина E_1 определялась на основе фактического графика $\sigma(\epsilon)$, полученного при испытании коротких стальных призм.

Построенный Кáрманом график (рис. 35) заслуживает внимательного рассмотрения. Предел текучести и предел пропорциональности разбивают кривую критических напряжений на три части. При гибкости $\lambda > 90,8$ кривая представляет собой уже известную ранее гиперболу Эйлера. Для меньших гибкостей критические напряжения лежат выше предела пропорциональности, но кривая не поднимается резко вверх, как эйлерова гипербола, а плавно приближается к пределу текучести. Наконец, при очень малых гибкостях кривая показывает критические напряжения, превышающие предел текучести. Наличие этой последней ветви графика объясняется стадией упрочнения стали, которая следует за площадкой текучести. Однако, как впоследствии было установлено, эту ветвь Кáрман построил не вполне правильно.

Правильное очертание графика $\sigma_k(\lambda)$ для пластических сталей показано на рис. 35 пунктиром. По мере уменьшения гибкости кривая

критических напряжений все более и более приближается к горизонтальной прямой, соответствующей пределу текучести. В точке $\lambda = 0$ кривая имеет точку возврата, поднимаясь сначала полого, а затем круто вверх. Таким образом, в области малых гибкостей одному и тому же значению λ соответствуют два, а для некоторых участков и три значения критического напряжения.

Это обстоятельство, парадоксальное на первый взгляд, легко объясняется тем, что вследствие наличия стадии самоупрочнения на графике $\sigma(\epsilon)$ существуют две, а иногда и три точки, для которых частное $\frac{T}{\sigma_k}$ имеет одно и то же значение. Для этих точек, соответствующих разным значениям σ_k , по формуле (12) получается одно и то же значение гибкости. Наличие острия в

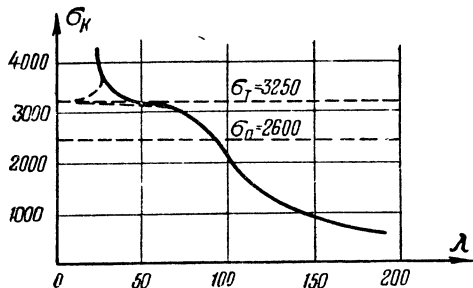


Рис. 35. График $\sigma_k(\lambda)$ по Кáрману

точке $\lambda = 0$ является следствием пластических свойств стали. В самом деле, при $\sigma_k = \sigma_T$ имеем

$$E_1 = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = 0.$$

Отсюда на основании (10) следует $T=0$, и формула (12) дает значение гибкости $\lambda = 0$. Чем более резко выражена площадка текучести на графике $\sigma(\varepsilon)$, тем отчетливее проявляется указанное острие на графике $\sigma_k(\lambda)$.

Исследованная Кáрманом сталь имела короткую площадку текучести, поэтому наличие острия на графике $\sigma_k(\lambda)$ ускользнуло от внимания исследователя при анализе опытов и при вычислениях.

Разумеется, превышение критических напряжений над пределом текучести в натуре может иметь место только в том случае, если стержень каким-либо образом преодолееет состояние неустойчивого равновесия, возникающее при $\sigma_0 = \sigma_T$, и перешагнет в область упрочнения стали. Хотя именно этот случай наблюдался в опытах Кáрмана, вряд ли можно на нем базироваться при установлении величины критических напряжений. Применяемые в настоящее время строительные стали не имеют столь крутого подъема графика $\sigma(\varepsilon)$ в области упрочнения, как сталь Кáрмана, поэтому для них превышение критических напряжений над пределом текучести может проявиться только при гибкостях, меньших 15. Мы будем считать, как это обычно принимают, что предел текучести практически является наивысшим значением критического напряжения. В соответствии с этим график $\sigma_k(\lambda)$ для пластических сталей будем изображать без ветви, лежащей выше предела текучести. Для сталей, не имеющих площадки текучести, производная $E_1 = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ нигде не обращается в нуль вплоть до предела прочности, и очертание графика $\sigma_k(\lambda)$ в этом случае имеет вид, указанный Кáрманом.

Примем, что при $\lambda = \lambda_n$ неупругая ветвь плавно сопрягается с эйлеровой гиперболой. Это предположение соответствует действительности, если график $\sigma(\varepsilon)$ не испытывает разрыва кривизны в точке $\lambda = \lambda_n$, $\sigma = \sigma_n$. Таким образом определяются направления концевых касательных неупругой ветви графика $\sigma_{кр}(\lambda)$. При наличии координат какой-либо промежуточной точки на этой ветви график может быть построен с удовлетворительной точностью.

Если пренебречь влиянием формы поперечного сечения, то неупругую ветвь графика можно аппроксимировать какой-либо подходящей кривой, удовлетворяющей высказанным выше граничным условиям. В качестве такой кривой может быть принят эллипс в косоугольных координатах, плавно сопрягающийся с эйлеровой гиперболой. В этих предположениях ординаты графика

ка $\sigma_k(\lambda)$ для стали Ст. 3 будут иметь значения, приведенные в табл. 8.

Т а б л и ц а 8

Критическое напряжение для Ст. 3 (центральное сжатие)

$$E = 2\,100\,000 \text{ кг/см}^2, \sigma_T = 2\,400 \text{ кг/см}^2, \sigma_{II} = 1\,900 \text{ кг/см}^2$$

Эллипс	$\lambda =$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
	$\sigma_k =$	2 400	2 397	2 388	2 373	2 352	2 325	2 290	2 245	2 188	2 111	1 996
Гипербола Эйлера	$\lambda =$		110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
	$\sigma_k =$		1 713	1 439	1 226	1 057	921	810	717	640	574	518

§ 26. РАВНОВЕСИЕ МЕЖДУ ВНЕШНИМИ УСИЛИЯМИ И НАПРЯЖЕНИЯМИ ПРИ НЕУПРУГОЙ РАБОТЕ СТАЛИ

Исследование устойчивости сжато-изогнутого стержня должно базироваться на изучении условий равновесия между внешними усилиями и напряжениями при неупругой работе стали. Под внешними усилиями в данном случае мы понимаем сжимающую силу N и изгибающий момент M , развивающийся в поперечном сечении стержня. Условия равновесия дают возможность при помощи графика $\sigma(\epsilon)$ установить зависимость между внешними усилиями и деформациями, затем построить изогнутую ось стержня, как некоторую форму равновесия, и, наконец, путем исследования устойчивости этой формы определить критическую нагрузку.

Так как очертание графика $\sigma(\epsilon)$ предполагается произвольным, то аналитическое решение задачи оказывается невозможным и приходится прибегать к численному методу решения. Предварительно необходимо установить, в какой мере эпюра напряжений следует очертанию графика $\sigma(\epsilon)$. Здесь возможны два различных случая в зависимости от соотношения между величиной момента и величиной нормальной силы.

В случае, если отношение $\frac{M}{N}$ не слишком мало по сравнению с размерами поперечного сечения стержня, то напряжения изгиба $\Delta\sigma_1$ и $\Delta\sigma_2$ также не являются малыми по сравнению с осевым напряжением σ_0 . Очертание эпюры напряжений по мере возрастания нагрузки от прямолинейной формы при вполне упругой работе приходит к криволинейной (рис. 36,а). Горизонтальная прямая, соответствующая пределу пропорциональности σ_p , разделяет каждую эпюру напряжений на две части, из которых нижняя ограничена прямолинейным отрезком, в то время как верхняя часть очерчена по кривой.

По мере роста осевых напряжений возрастают и напряжения от изгиба. Суммарное напряжение у наружного волокна σ_2 сначала увеличивается (этап нагрузки 1—2), затем, не достигнув еще значения σ_n , начинает убывать (этап нагрузки 2—3) и может, наконец, перейти в область растяжения (этап нагрузки 3—4). Зона разгрузки ac , составляющая часть зоны растяжения при изгибе ab , целиком лежит ниже предела пропорциональности. Разгрузка протекает в упругой области, поэтому распределение напряжений по сечению полностью следует очертанию графика $\sigma(\epsilon)$.

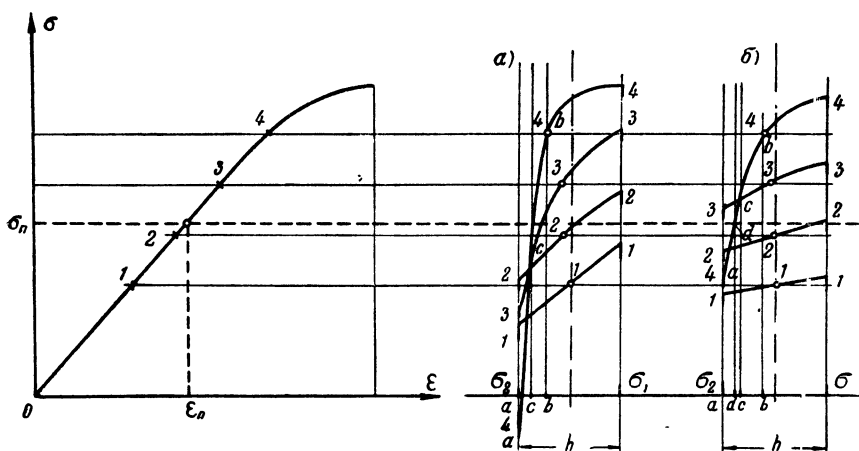


Рис. 36. Распределение напряжений по сечению сжатого-изогнутого стержня в соответствии с графиком $\sigma(\epsilon)$

a — отношение $\frac{M}{N}$ велико, $б$ — отношение $\frac{M}{N}$ мало

Иначе обстоит дело в случае, когда отношение $\frac{M}{N}$ мало по сравнению с размерами сечения. Здесь напряжения от изгиба малы по сравнению с осевым напряжением σ_0 . Возрастание осевого напряжения влечет за собой возрастание суммарного напряжения у наружного волокна σ_2 , которое переходит за предел пропорциональности еще до образования зоны разгрузки (рис. 36, б). Зона разгрузки ac образуется при высоком значении осевого напряжения σ_0 (этап нагрузки 3—4), причем часть зоны разгрузки находится в упругой области ad , в то время как другая часть dc лежит выше предела пропорциональности. Очертание графика $\sigma(\epsilon)$ на участке dc криволинейно, в то время как эпюра напряжений в соответствии с линейным законом разгрузки по всей длине зоны разгрузки ac должна быть принята прямо-

линейной. В этом случае распределение напряжений по сечению уже не следует полностью графику $\sigma(\varepsilon)$.

Если наибольшее суммарное напряжение в зоне разгрузки не намного превышает предел пропорциональности, то криволинейный участок $d\sigma$ графика $\sigma(\varepsilon)$ мало отличается от прямой линии; поэтому, принимая эпюру напряжений полностью подобной графику $\sigma(\varepsilon)$, мы допускаем незначительную погрешность. Однако эта погрешность возрастает по мере приближения наибольшего напряжения в зоне разгрузки к пределу текучести.

Чем меньше эксцентриситет, тем более резко будет проявляться указанное различие между графиком $\sigma(\varepsilon)$ и эпюрой распределения напряжений по сечению. В случае центрального сжатия зона разгрузки охватывает всю растянутую от изгиба область, поэтому растягивающие напряжения от изгиба всегда будут распределяться по закону прямой линейной независимо от вида графика $\sigma(\varepsilon)$.

Вследствие сложного очертания эпюры напряжений точное построение изогнутой оси стержня весьма трудоемко. Полностью исследован только случай внецентренного сжатия стержня прямоугольного сечения при шарнирном опирании его концов.

Предположим, что зависимость $\sigma(\varepsilon)$ задана или графически в достаточно крупном масштабе, или же в форме таблицы с достаточным числом координатных точек. Построение эпюры напряжений по заданным усилиям N и M требует предварительного определения положения нейтральной зоны и является задачей весьма сложной, успешное решение которой возможно только путем ряда пробных попыток. Проще поэтому считать заданной только величину нормальной силы N , принять подходящую эпюру напряжений и вычислить отсюда изгибающий момент M , уравновешивающий эту эпюру.

Практическое вычисление удобнее всего вести следующим образом. Пусть известна сила N , следовательно, и осевое напряжение σ_0 . Задаемся некоторым произвольным значением относительного удлинения ε_1 внутреннего волокна от изгиба. Тем самым в соответствии с графиком определяется величина сжимающего напряжения от изгиба $\Delta\sigma_1$ (рис. 37). Величину ε_2 следует теперь подобрать таким образом, чтобы удовлетворить условию равновесия, согласно которому общий объем эпюры напряжений от изгиба должен равняться нулю. Для этого объем эпюры сжимающих напряжений от изгиба должен быть равен по абсолютной величине объему эпюры растягивающих напряжений от изгиба.

Для прямоугольного поперечного сечения вследствие постоянства ширины его b вытекает условие равенства площадей эпюр сжатия и растяжения от изгиба. Обозначим через Ω площадь эпюры сжимающих напряжений от изгиба на графике $\sigma(\varepsilon)$, тогда для прямоугольного поперечного сечения величина ε_2 должна быть подобрана таким образом, чтобы площадь эпюры

растягивающих напряжений от изгиба также равнялась Ω . Тем самым определяется очертание эпюры напряжений, соответствующей заданному значению осевого напряжения σ_0 и принятой произвольно величине ε_1 . Остается вычислить величину изгибающего момента M , уравнивающего полученную эпюру напряжений.

Для прямоугольного поперечного сечения такое вычисление достигается без особого труда. Нам уже известно, что эпюра напряжений в этом случае переносится с графика $\sigma(\varepsilon)$ на поперечное сечение стержня так, что величина $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ преоб-

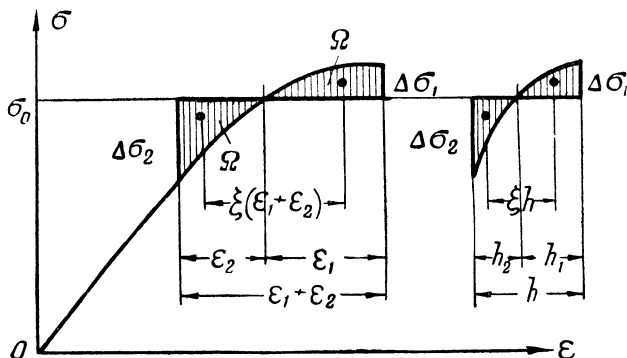


Рис. 37. Эпюра напряжений для сжато-изогнутого стержня прямоугольного поперечного сечения (напряжения изгиба заштрихованы)

разуется в высоту сечения h . Площадь эпюры сжатия или растяжения от изгиба, отнесенная к поперечному сечению стержня, будет равна

$$\Omega \frac{h}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2};$$

расстояние между центрами тяжести обеих эпюр, равное на графике $\sigma(\varepsilon)$ $\xi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$, где ξ — коэффициент, меньший единицы и зависящий от вида эпюр, преобразуется при переходе к поперечному сечению стержня в ξh . Воспринимаемый эпюрой изгибающий момент равен

$$M = \frac{\xi}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} b h^2 \Omega. \quad (13)$$

Вычисление площадей Ω и их статических моментов производится делением их на простые геометрические фигуры; при этом криволинейные участки с достаточной степенью точности можно считать очерченными по квадратной параболе.

§ 27. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТО-ИЗОГНУТОГО СТЕРЖНЯ. МЕТОД ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Найденные в предыдущем параграфе зависимости между внешними усилиями и напряжениями имеют силу для каждого отдельного сечения сжато-изогнутого стержня. Путем интегрирования этих зависимостей, рассматриваемых как дифференциальные соотношения, можно построить изогнутую ось стержня в целом.

В отличие от случая центрального сжатия внецентренно сжатый стержень изгибается с самого начала — при нагрузке, еще очень далекой от критической величины. Зависимость между напряжениями и удлинениями имеет различный характер для разных точек по длине стержня. В средней части стержня напряжения могут превышать предел пропорциональности, в то время как примыкающие к опорам ветви изогнутой кривой будут работать еще вполне упруго. С возрастанием нагрузки область неупругой работы все более расширяется как по сечению, так и по длине стержня.

В основу исследования кладется дифференциальное уравнение изгиба

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{h} \approx y'' \quad (14)$$

Случай малых эксцентриситетов, когда растягивающие напряжения от изгиба распределяются по закону прямой линии, был изучен Кáрманом, который установил, что зависимость между прогибом y_0 в середине пролета внецентренно сжатого стержня и осевым напряжением σ_0 имеет вид кривой, обладающей точкой экстремума. На графике (рис. 38) дано несколько таких кривых при гибкости $\lambda = 60$ для разных эксцентриситетов a . Эксцентриситеты и прогибы указаны в долях высоты сечения h . Механические свойства стали, исследованной Кáрманом, указаны в § 25. Для гибкости $\lambda = 60$ Кáрман в случае центрального сжатия нашел $\sigma_K = 3135 \text{ кг/см}^2$.

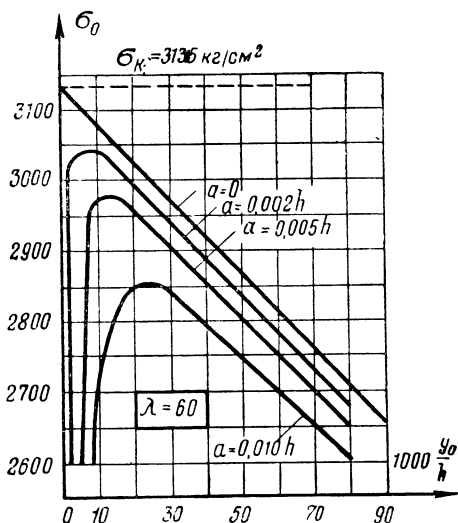


Рис. 38. Зависимость между осевым напряжением σ_0 и прогибом y_0 для внецентренно сжатого стержня при $\lambda = 60$ по Кáрману

Таким образом, в неупругой области при заданных значениях λ , a и σ_0 возможны два состояния равновесия. Первичное состояние равновесия соответствует меньшему прогибу и является устойчивым, в то время как вторичное состояние равновесия характеризуется большим прогибом и является неустойчивым. Критическое напряжение является наибольшим по величине, поэтому аналитический критерий потери устойчивости записывается в виде

$$\frac{d\sigma_0}{dy_0} = 0, \quad (15)$$

т. е. критическое состояние соответствует точке экстремума кривой $\sigma_0(y_0)$, если гибкость λ и эксцентриситет a рассматривать как величины постоянные.

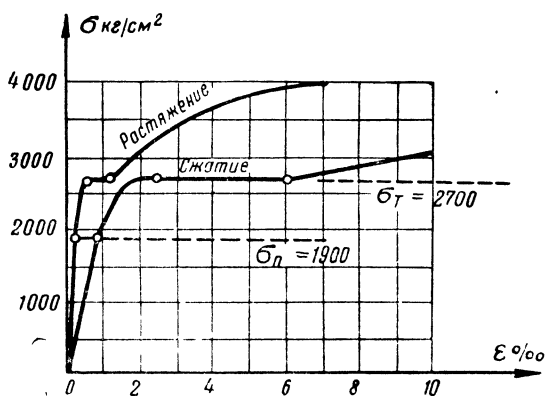


Рис. 39. График $\sigma(\epsilon)$ для стали, исследованной Хвалла

Основные закономерности, связанные с понятием потери устойчивости для идеального упруго-пластического материала, сохраняют свою силу и для стального стержня. Так как поведение внецентренно сжатого стержня из идеального упруго-пластического материала было подробно рассмотрено в главе третьей, то здесь уместно будет сосредоточить все внимание на исследовании тех особенностей, которые имеют место при переходе от идеализированного графика к фактическому графику $\sigma(\epsilon)$ для стали.

Рассмотрим метод численного интегрирования, примененный Хвалла в ряде работ¹ для построения изогнутой оси внецентренно сжатого стального стержня. Хвалла принимал, что распределение напряжений по сечению полностью следует графику $\sigma(\epsilon)$

¹ Е. Chwalla, статьи в журнале «Stahlbau», 1934.

для стали, т. е. не учитывал прямой разгрузки, поэтому полученные им результаты действительны только для случая не очень малых эксцентриситетов. Механические показатели исследованной стали представлены на рис. 39, модуль упругости равен $E=2\,210\,000 \text{ кг/см}^2$.

Отсчитывая ординаты z изогнутой оси стержня от линии действия сжимающей силы (рис. 40), т. е. полагая

$$\left. \begin{aligned} z &= a + y; \\ M &= Nz, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

рассмотрим некоторый условный центрально сжатый стержень длиной L . Построив изогнутую ось этого стержня, нетрудно перейти к внецентренно сжатому стержню длиной l при плече силы a .

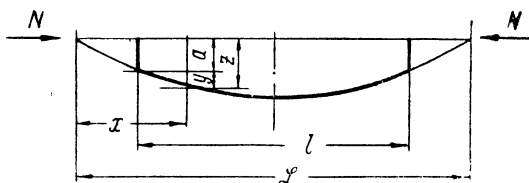


Рис. 40. Изогнутая ось внецентренно сжатого стержня

Примем некоторое фиксированное значение осевого напряжения σ_0 , зададимся величиной ε_1 , из условий равновесия найдем ε_2 и вычислим, как было показано в предыдущем параграфе, величину изгибающего момента M . Таким образом, для каждого значения величины

$$\frac{z}{h} = \frac{\xi}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \frac{\Omega}{\sigma_0} \quad (17)$$

находим соответствующее значение величины

$$-hz'' = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \quad (18)$$

Первый этап решения дает в виде таблицы или графика (рис. 41, I) зависимость

$$-hz'' = f_1\left(\frac{z}{h}\right). \quad (19)$$

Эта зависимость для непрерывной последовательности точек представляет собой дифференциальное уравнение изогнутой оси. Так как зависимость эта дана в численном виде, приходится прибегнуть к методам численного интегрирования. Решение задачи достигается путем двукратного использования формул механических квадратур.

Второй этап решения заключается в разыскании зависимости

$$z'^2 = f_2 \left(\frac{z}{h} \right) \quad (20)$$

при помощи интегрирования

$$z'^2 = 2 \int_{\frac{z}{h}}^{\frac{z_0}{h}} (-hz'') d \frac{z}{h} = 2 \int_{\frac{z}{h}}^{\frac{z_0}{h}} f_1 \left(\frac{z}{h} \right) d \frac{z}{h}. \quad (21)$$

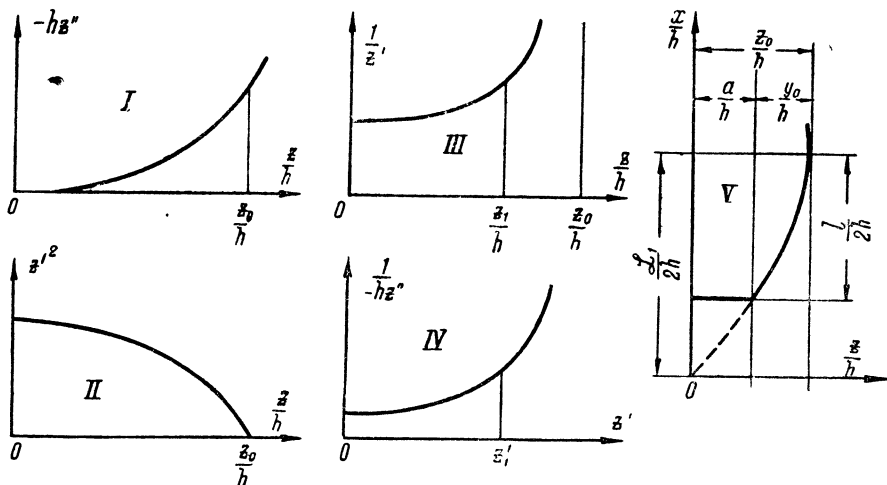


Рис. 41. Построение изогнутой оси внецентренно сжатого стержня методом численного интегрирования

Здесь $z_0 = a + y_0$ — ордината в середине пролета стержня, которой следует задаться. Пределы интегрирования установлены с учетом граничного условия: при $z = z_0$ должно быть $z' = 0$ и $z'^2 = 0$ в силу симметрии кривой изгиба относительно середины пролета. Справедливость соотношения (21) вытекает из тождества

$$t'' = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} t'^2 \right),$$

которое может быть проверено непосредственным дифференцированием.

Отсюда следует, что зависимость (20), представляемая кривой II (рис. 41), получается путем вычисления площади кривой I справа налево, начиная от точки z_0 .

Для облегчения вычислений и возможности использования наиболее простых формул квадратур зависимость (19) удобно

представить в виде таблицы, где значения аргумента разделяются равными интервалами. Так как полученная по формуле (22) последовательность значений $\frac{z}{h}$ не удовлетворяет в общем случае этому условию, то построение указанной выше таблицы достигается путем интерполяции.

Извлекая квадратный корень и переходя к обратным величинам, находим

$$\frac{1}{z'} = f_3 \left(\frac{z}{h} \right). \quad (22)$$

Это есть третий этап решения, результаты которого изображаются кривой *III* (рис. 41).

Теперь представляется возможность совершить второе интегрирование

$$\frac{x}{h} = \int_0^{\frac{z}{h}} \frac{1}{z'} d \frac{z}{h} = \int_0^{\frac{z}{h}} f_3 \left(\frac{z}{h} \right) d \frac{z}{h} \quad (23)$$

и тем самым установить зависимость между x и z . Однако при $z \rightarrow z_0$ кривая f_3 уходит в бесконечность, так как $z'_0 = 0$. Поэтому площадь кривой можно вычислить по формуле (23) только на некотором участке от $z_0=0$ до $z=z_1 < z_0$. Для значений z_1 , близких к z_0 , применяется другая формула, определяющая расстояние от середины стержня до данной точки

$$\frac{L}{2h} - \frac{x}{h} = \int_{z'}^0 \frac{1}{hz''} dz' = \int_{z'}^0 f_4(z') dz'. \quad (24)$$

Здесь зависимость

$$\frac{1}{hz''} = f_4(z') \quad (25)$$

строится при помощи соотношений (19) и (20).

Построение кривой *IV* (рис. 41), изображающей зависимость (25), завершает четвертый этап решения. Изогнутая ось стержня (рис. 41, V) определяется зависимостью

$$\frac{x}{h} = f_5 \left(\frac{z}{h} \right), \quad (26)$$

которая находится при помощи (23) или (24) как площадь кривых *III* или соответственно *IV*. Это есть пятый этап интегрирования, в результате которого определяется неизвестная длина условного стержня $\frac{L}{h}$, соответствующая принятому прогибу в середине пролета $\frac{z_0}{h}$.

Пока не делалось никаких предположений относительно величины эксцентриситета a , длина $\frac{L}{h}$ соответствует случаю центрального сжатия. Переход к внецентренно сжатому стержню легко осуществить, если провести параллельную оси $\frac{x}{h}$ прямую на расстоянии $\frac{a}{h}$ от этой оси. Тем самым определяется длина стержня l , соответствующая заданному эксцентриситету.

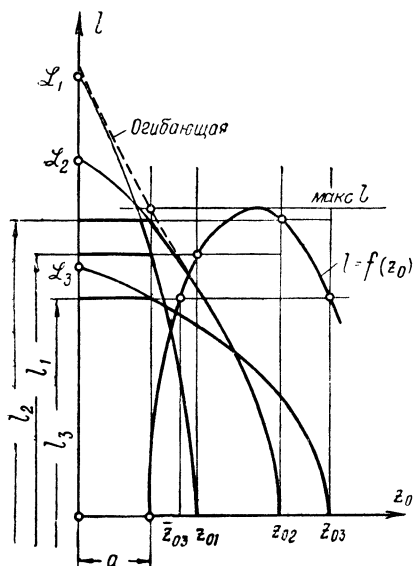


Рис. 42. Построение графика $l = f(z_0)$

Этот процесс интегрирования, выполненный для одного произвольно взятого прогиба $z_0 = y_0 + a$, дает возможность построить изогнутую ось стержня, как некоторую форму равновесия. Повторяя этот процесс для ряда других значений z_0 при одной и той же величине осевого напряжения σ_0 и переходя к внецентренно сжатому стержню с эксцентриситетом a , мы каждый раз получаем новую длину стержня l . Таким образом строится зависимость

$$l = f(z_0) \quad (27)$$

при постоянном σ_0 .

Каждая точка кривой (27) соответствует некоторому состоянию равновесия. Задача сводится к разыскиванию значений l и y_0 , соответствующих критическому состоянию стержня. Наибольшая длина

стержня характеризует состояние потери устойчивости, т. е.

$$l_{кр} = \max l,$$

отсюда аналитический критерий для определения критического состояния имеет вид

$$\frac{\partial l}{\partial z_0} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial l}{\partial y_0} = 0.$$

Пусть, задавшись тремя различными значениями z_{01} , z_{02} и z_{03} , мы нашли указанным выше путем соответствующие длины l_1 , l_2 и l_3 при заданных значениях σ_0 и a (рис. 42). Зависимость $l = f(z_0)$ изображается в прямоугольной системе координат кривой линией, имеющей максимум. Точки, лежащие на восходя-

шей ветви этой кривой, соответствуют состояниям устойчивого равновесия. Наоборот, точки нисходящей ветви соответствуют состояниям неустойчивого равновесия. Критическое состояние стержня имеет место в точке экстремума, когда длина l достигает максимума.

Одной и той же длине стержня, например, l_3 , соответствуют две формы равновесия, определяемые прогибами \bar{z}_{03} и z_{03} . Если стержень предоставлен сам себе, то он примет форму устойчивого равновесия с прогибом \bar{z}_{03} . Если затем некоторая внешняя причина выведет стержень из этого положения, увеличивая слегка прогиб, то после устранения внешней причины стержень вернется к своей первоначальной форме с прогибом \bar{z}_{03} . Однако если увеличенный искусственно прогиб превысит значение z_{03} , то стержень после устранения внешней причины не вернется к равновесному состоянию, прогиб сам по себе будет возрастать, и стержень выйдет из работы.

При построении кривой $l=f(y_0)$ удобнее всего пользоваться величинами нулевой размерности, относя длину l и прогиб y_0 к некоторой линейной характеристике размеров поперечного сечения, например, к высоте сечения h , радиусу инерции i или ядровому расстоянию k . Мы относим длину стержня к радиусу инерции, получая таким образом гибкость $\lambda = \frac{l}{i}$, а прогиб и эксцентриситет относим к ядровому расстоянию, получая таким образом относительный прогиб $\eta = \frac{y_0}{k}$ и относительный эксцентриситет $\nu = \frac{a}{k}$.

Вместо зависимости (27) мы можем, следовательно, искать зависимость

$$\lambda = \varphi(\eta) \quad (28)$$

при заданном осевом напряжении σ_0 и относительном эксцентриситете ν .

Критерий потери устойчивости в этом случае записывается так:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \eta} = 0. \quad (29)$$

Исключая из уравнений (28) и (29) величину η , получаем значение λ_{\max} , для которого положенное в основу расчета осевое напряжение является критическим. Критическое напряжение для сжато-изогнутого стержня будем обозначать $\sigma_{кр}$ в отличие от критического напряжения σ_k при центральном сжатии.

Задаваясь новым значением осевого напряжения σ_0 и повторяя в той же последовательности все вычисления, можно найти новую величину λ_{\max} для того же значения относительного экс-

центриситета ν . Таким образом устанавливается зависимость между величинами λ , ν и $\sigma_{кр}$.

Величину $l_{\text{макс}}$ при заданном эксцентриситете можно получить и не прибегая к построению кривой (27). Для этого необходимо вычертить огибающую кривых, изображающих изогнутые оси стержня. Огибающая эта на чертеже (рис. 42) показана пунктиром. Точка пересечения огибающей с прямой $z=a$ определяет искомую длину $l_{\text{макс}}$.

Если вместо l и z_0 на координатных осях при этом построении откладывать λ и η , то указанная выше огибающая изоб-

разит зависимость $\lambda_{\text{макс}}$ от величины относительного эксцентриситета при постоянном значении критического напряжения $\sigma_{кр}$. Подобного рода кривые можно построить также при исследовании устойчивости внецентренно сжатого стержня из идеального упруго-пластического материала.

Принимая различные значения относительного эксцентриситета ν , можно построить ряд кривых, изображающих зависимость

$$\lambda = f\left(\frac{z_0}{h}\right)$$

при заданном значении осевого напряжения σ_0 . Семейство таких кривых при $\sigma_0 = 1500 \text{ кг/см}^2$ показано на рис. 43; отмеченные точки экстремума характеризуют переход стержня от состояния

устойчивого равновесия к состоянию неустойчивого равновесия.

На этих кривых отчетливо различаются так называемые максимумы первого порядка, соответствующие большим и средним гибкостям, и максимумы второго порядка, имеющие место при малых гибкостях. Максимумы второго порядка характеризуются гораздо большими прогибами, нежели максимумы первого порядка. Наличие максимумов второго порядка объясняется стадией упрочнения стали, при которой кривая графика $\sigma(\epsilon)$ после горизонтального участка (площадка текучести) снова поднимается вверх.

Если провести аналогичное исследование для целого ряда значений σ_0 и разыскивать каждый раз наибольшее значе-

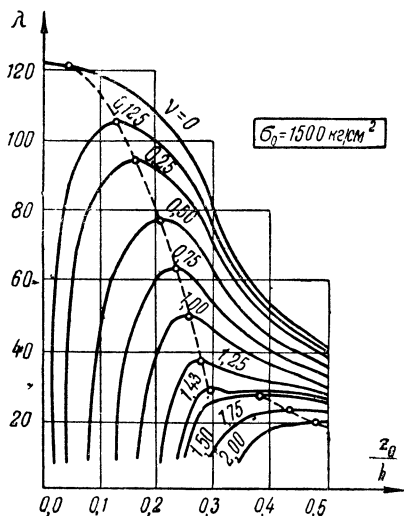


Рис. 43. График $\lambda = f\left(\frac{z_0}{h}\right)$ по вычислениям Хвалла (прямоугольное сечение, $\sigma_0 = 1500 \text{ кг/см}^2$)

ние $\lambda_{\text{макс}}$ в зависимости от эксцентриситета ν , то можно построить график $\sigma_{\text{кр}}(\lambda)$, подобный тому, который был аналитически построен для идеального упруго-пластического материала. Этот график $\sigma_{\text{кр}}(\lambda)$ дает полную картину работы внецентренно сжатого стального стержня (рис. 44). Верхняя кривая $\nu = 0$ соответствует случаю центрального сжатия. По методике построения эта уже известная нам кривая Энгессера — Ясин-

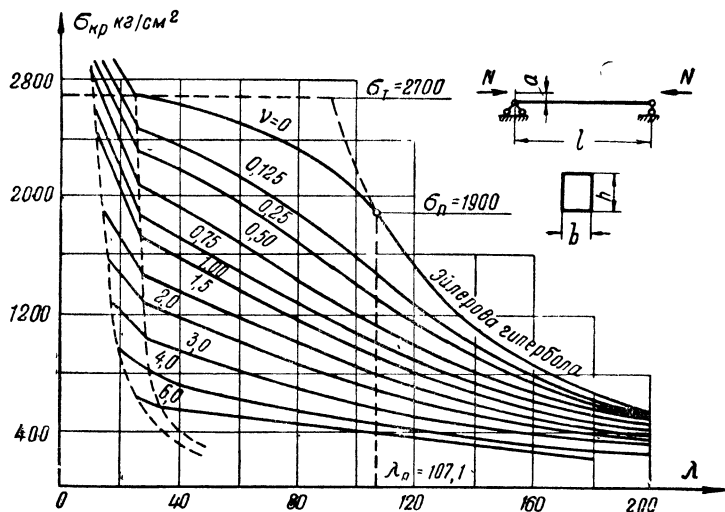


Рис. 44. График $\sigma_{\text{кр}}(\lambda)$ для внецентренно сжатого стержня по Хвалла (прямоугольное сечение)

ского отличается от всех нижележащих кривых. В самом деле, при изучении распределения напряжений по сечению здесь должна быть принята во внимание прямая разгрузки, которая для всех нижележащих кривых, соответствующих случаю больших эксцентриситетов, не должна учитываться.

Пунктирная линия на графике (рис. 44) разделяет области максимумов первого и второго порядка. Кривые обрываются слева у оси ординат в точках, которые характеризуются появлением на наружной стороне сечения растягивающих напряжений, близких к пределу прочности.

§ 28. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ВНЕЦЕНТРЕННО СЖАТОГО СТЕРЖНЯ

Весьма трудоемкий процесс численного интегрирования, рассмотренный в предыдущем параграфе, дает возможность проанализировать работу внецентренно сжатого стального стержня, исходя из фактического графика $\sigma(\epsilon)$.

Стремление избежать громоздких вычислений приводит к построению приближенных методов, основанных на той или иной упрощающей предпосылке. Так как главные трудности точного решения заключаются, с одной стороны, в учете фактического очертания графика $\sigma(\epsilon)$, и, с другой стороны, в необходимости разыскания путем интегрирования формы изогнутой оси стержня, то наиболее эффективными в смысле снижения трудоемкости расчета являются следующие две упрощающие предпосылки:

а) замена фактического графика $\sigma(\epsilon)$ идеализированным законом зависимости между деформациями и напряжениями,

б) замена действительной формы изогнутой оси стержня некоторой простой кривой, удовлетворяющей граничным условиям задачи.

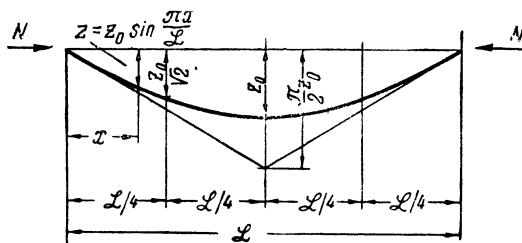


Рис. 45. Изогнутая ось стержня по методу огибающих (полуволна синусоиды)

При исследовании работы стальных стержней в качестве первого упрощающего предположения можно принять гипотезу идеального упруго-пластического материала. Со вторым упрощающим предположением мы уже познакомились при рассмотрении приближенных методов разыскания критической силы для центрально сжатого абсолютно упругого стержня (см. главу первую). Для шарнирно опертого двумя концами стержня наиболее простой кривой, удовлетворяющей условиям закрепления на опорах, является синусоида, зависящая от одного параметра. Тем самым задача сводится к исследованию системы с одной степенью свободы. Деформированное состояние стержня вполне определяется величиной наибольшего прогиба в середине пролета.

Центрально сжатый шарнирно опертый стержень при потере устойчивости в упругой области принимают форму синусоиды. Упругая кривая для сжато-изогнутого шарнирно опертого стержня также весьма близка к синусоиде. Точно так же мало отличается от синусоиды форма изогнутой оси внецентренно сжатого шарнирно опертого стержня, материал которого является идеальным упруго-пластическим (см. главу третью). Поэтому естественно предположить, что изогнутая ось стального внецентренно сжатого стержня при шарнирном опирании концов может быть с достаточной степенью точности заменена синусоидой.

Рассмотрим приближенные методы решения задач устойчивости, основанные на фактическом графике $\sigma(\varepsilon)$ и на упрощающей предпосылке «б», согласно которой действительная форма изогнутой оси шарнирно опертого внецентренно сжатого стержня заменяется синусоидой. Известны два таких метода: метод огибающих и метод касательных.

По *методу огибающих* рассматривается сначала центрально-сжатый стержень длиной L и изогнутая ось стержня принимается в виде полуволны синусоиды (рис. 45)

$$z = z_0 \sin \frac{\pi x}{L}, \quad (30)$$

где z_0 — наибольший прогиб в середине пролета.

Дифференцируя дважды по x , находим

$$z'' = -\frac{\pi^2}{L^2} z_0 \sin \frac{\pi x}{L};$$

следовательно, кривизна в середине пролета стержня равна

$$\frac{1}{\rho_0} \approx z''_0 = -\frac{\pi^2}{L^2} z_0.$$

Используя выражение (16) для радиуса кривизны, находим

$$L = \pi \sqrt{\frac{h z_0}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}.$$

Величина z_0 может быть исключена при помощи условия равновесия $M = N z_0$ (причем величину M мы здесь рассматриваем как момент, воспринимаемый сечением при заданной эпюре напряжений):

$$L = \pi \sqrt{\frac{h M}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) N}}. \quad (31)$$

Для прямоугольного поперечного сечения $N = b h \sigma_0$, а величина M определяется формулой (13). Таким образом, находим

$$L = \frac{\pi h}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \sqrt{\frac{\xi Q}{\sigma_0}}, \quad (32)$$

т. е. длина стержня определяется, если известна эпюра напряжений в середине пролета.

Практически вычисления производятся следующим образом. Задаемся некоторой величиной относительного удлинения сжатого от изгиба волокна ε_1 при фиксированном значении осевого напряжения σ_0 . Из условия равновесия, согласно которому объемы эпюр напряжений растяжения и сжатия от изгиба равны по абсолютной величине, находим, пользуясь графиком $\sigma(\varepsilon)$, величину относительного удлинения ε_2 у противоположной стороны сечения. Далее следует вычислить величину воспринимаемого сечением изгибающего момента M , после чего по формуле

(31) легко найти неизвестную длину L . В случае прямоугольного сечения возможно применение формулы (32), где Ω означает площадь эпюры напряжений сжатия или растяжения от изгиба на графике $\sigma(\epsilon)$, а ξ — коэффициент, пропорциональный расстоянию между центрами тяжести упомянутых эпюр. Зная длину стержня L и стрелу прогиба в середине пролета $z_0 = \frac{M}{N}$ или для прямоугольного поперечного сечения

$$z_0 = \frac{\xi \Omega}{(\epsilon_1 + \epsilon_2) \sigma_0} h,$$

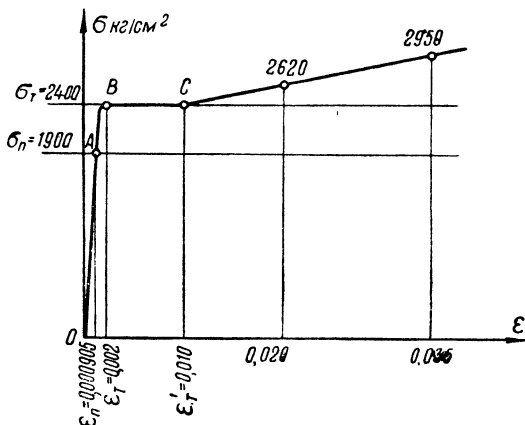


Рис. 46. График $\sigma(\epsilon)$ для стали марки St 37

можно легко построить всю изогнутую ось стержня, как полу-волну синусоиды (30). Этим самым достигается результат, полностью эквивалентный пятому этапу точного решения, рассмотренного в предыдущем параграфе. Практически для построения синусоиды достаточно знать длину L и нанести на чертеж наибольшую ординату в середине пролета z_0 , ординату в четверти пролета, равную $\frac{z_0}{\sqrt{2}} \approx 0,707z_0$, а также концевую касательную,

которая отсекает в середине пролета стержня отрезок $\frac{\pi}{2} z_0 \approx 1,571 z_0$ (рис. 45).

Дальнейший ход расчета совпадает с точным решением. Переход к внецентренно сжатому стержню осуществляется путем нанесения на чертеж прямой линии, параллельной оси x и отстоящей от нее на расстоянии a . Тем самым определяется длина l стержня, соответствующая эксцентриситету a , осевому напряжению σ_0 и прогибу в середине пролета стержня $y_0 = z_0 - a$.

Форме равновесия, при которой получается наибольшая длина стержня $\max l$, соответствует критическому состоянию стерж-

ня. Разыскание этого наибольшего значения $\max l$ возможно как путем построения кривой $l=f(y_0)$, так и при помощи построения огибающей кривых, изображающих изогнутую ось стержня. Таким образом определяется гибкость $\lambda = \frac{l}{i}$, для которой при заданном эксцентриситете a (или $\nu = \frac{a}{k}$) положенное в основу расчета осевое напряжение σ_0 оказывается критическим. Задаясь различными значениями σ_0 и a и производя указанные

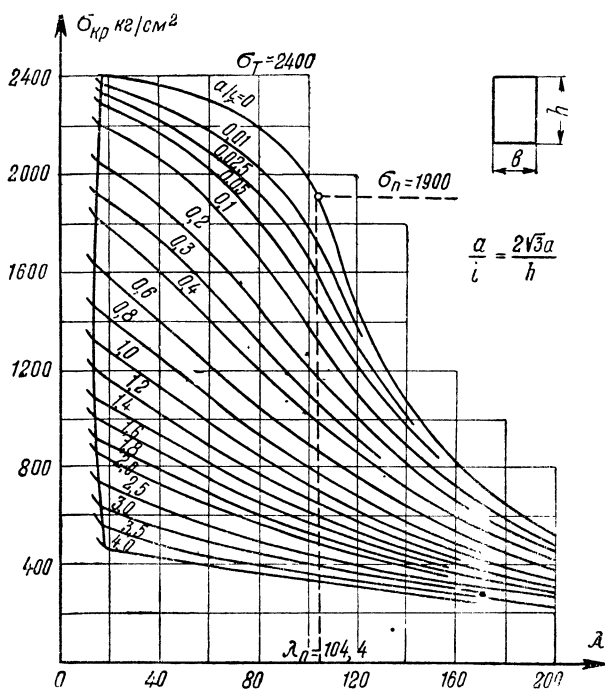


Рис. 47. График $\sigma_{кр}(\lambda)$ для внецентренно сжатого стержня прямоугольного сечения по Гартману

вычисления, можно построить зависимость между величинами λ , ν и $\sigma_{кр}$.

Пользуясь изложенным методом, Ф. Гартман¹ построил график $\sigma_{кр}(\lambda)$ для стержня прямоугольного сечения. В основу расчета была положена зависимость $\sigma(\varepsilon)$, представленная на рис. 46. Модуль упругости равен $E = 2\,100\,000 \text{ кг/см}^2$.

В качестве меры эксцентриситета при построении графика (рис. 47) принято отношение плеча силы к радиусу инерции $\frac{a}{i}$.

¹ Ф. Гартман, Устойчивость инженерных сооружений, Госстройиздат, 1939 (пер. с нем.).

Для прямоугольного сечения $\kappa = \frac{h}{6}$ и $i = \sqrt{\frac{h}{12}}$, следовательно, $\nu = \sqrt{3} \frac{a}{i}$. Для гибкостей $10 < \lambda < 20$ имеет место излом кривых, соответствующий появлению максимумов второго порядка.

Метод касательных основан на несколько ином представлении о форме изогнутой оси стержня, нежели метод огибающих, и отличается своеобразной интерпретацией аналитического условия потери устойчивости.

Изогнутая ось внецентренно сжатого стержня принимается в виде полуволны синусоиды (рис. 48)

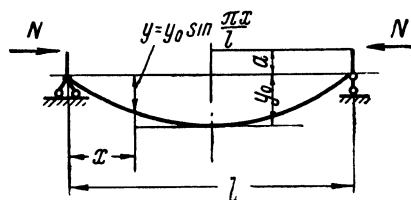


Рис. 48. Изогнутая ось стержня по методу касательных

$$y = y_0 \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (33)$$

причем l здесь означает фактическую длину стержня;

y — фактический прогиб, отсчитанный от прямолинейной оси стержня при отсутствии нагрузки.

Нетрудно видеть, что граничные условия при этом удовлетворяются не вполне

но. Известно, что для синусоиды вторая производная y'' в узловых точках $x=0$ и $x=l$ равна нулю, следовательно, и кривизна на концах стержня равна нулю:

$$\frac{1}{\rho} \approx y'' = 0.$$

Это условие для внецентренно сжатого стержня, вообще говоря, не выполняется. Однако равновесие стержня в основном определяется условиями работы средней части пролета, где имеют место наибольшие напряжения и наибольшие деформации. Влияние же примыкающих к опорам слабо деформированных участков изогнутой оси стержня вообще незначительно, поэтому отмеченная несогласованность граничных условий мало отражается на точности результата.

Для принятой формы (33) изогнутой оси стержня кривизна в середине пролета равна

$$\frac{1}{\rho_0} \approx y_0'' = -\frac{\pi^2}{l^2} y_0,$$

но, с другой стороны, на основании (16) имеем

$$\frac{1}{\rho_0} = -\frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{h},$$

где ϵ_1 и ϵ_2 — относительные удлинения сжатого и соответ-

венно растянутого волокна от изгиба. Отсюда находим прогиб в середине пролета:

$$y_0 = \frac{l^2}{\pi^2} \cdot \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{h}. \quad (34)$$

Если задано осевое напряжение σ_0 , то для принятой эпюры напряжений можно вычислить прогиб по формуле (34), а также найти воспринимаемый сечением изгибающий момент M , который для прямоугольного сечения определяется соотношением (13). Таким образом устанавливается зависимость между моментом M и прогибом y_0 . Для построения графика функции $M=M(y_0)$ при постоянном значении осевого напряжения проще всего, как уже указывалось выше, задаться рядом значений ϵ_1 , затем из условия равновесия подобрать соответствующие значения ϵ_2 . Полученная эпюра напряжений определяет как y_0 , так и

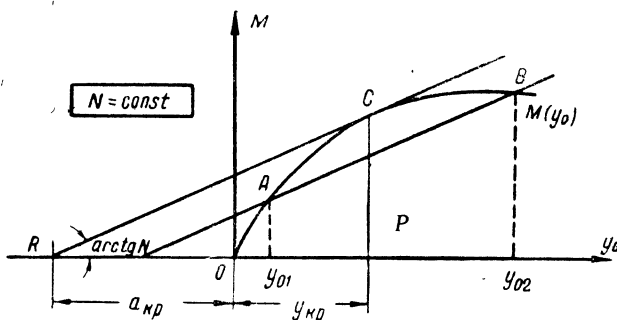


Рис. 49. График $M(y_0)$ и прямые $M = N(y_0 + a)$

соответствующее значение воспринимаемого сечением изгибающего момента M .

Предположим, что построен график $M(y_0)$ для заданной формы поперечного сечения при постоянном значении осевого напряжения σ_0 (рис. 49). Для внецентренно сжатого стержня изгибающий момент в середине пролета равен

$$M = N(y_0 + a). \quad (35)$$

Уравнение (35) изображается на графике (рис. 49) прямой линией, отсекающей на оси Oy_0 отрезок a . Пересечение этой прямой линии с кривой $M=M(y_0)$ определяет некоторое равновесное состояние стержня. При этом уравнение (35) мы можем трактовать как уравнение внешнего момента, а зависимость $M=M(y)$ — как уравнение внутреннего момента, воспринимаемого сечением. Равенство внешнего и внутреннего моментов есть необходимое условие равновесия.

Вообще говоря, прямая (35) пересекает кривую внутреннего момента в двух точках A и B , которым соответствуют два раз-

y_{01} и y_{02} . Мы имеем два различных состояния равновесия, из которых первое, определяемое прогибом y_{01} , является устойчивым, а второе, определяемое прогибом y_{02} , — неустойчивым.

Варьируя величину эксцентриситета a , мы получаем семейство параллельных друг другу прямых (35), которые по отношению к кривой графика являются секущими.

Предельным положением для этих секущих является касательная к кривой $M=M(y_0)$ в точке C . Эта касательная определяет одно единственное состояние равновесия, которое является критическим. Соответствующее значение эксцентриситета a определяется длиной отрезка OR на оси Oy_0 при выбранном масштабе.

Приведенные выше соображения подтверждаются следующими простыми выкладками. Будем исходить из уже известного нам аналитического критерия потери устойчивости (15):

$$\frac{\partial \sigma_0}{\partial y_0} \text{ или } \frac{\partial N}{\partial y_0} = 0.$$

Дифференцируем обе части соотношения (35) по переменной y_0 , предполагая значение a постоянным:

$$\frac{\partial M}{\partial y_0} = \frac{\partial N}{\partial y_0} (y_0 + a) + N$$

и примем во внимание вышеуказанный критерий потери устойчивости, тогда получим

$$\frac{\partial M}{\partial y_0} = N, \quad (36)$$

т. е. в критическом состоянии касательная к кривой $M=M(y_0)$ имеет тангенс угла наклона, равный N .

Построение касательной к кривой $M=M(y_0)$ при заданной форме поперечного сечения позволяет определить величину эксцентриситета a , при которой принятое осевое напряжение оказывается критическим $\sigma_{кр}$. В точке C графика (рис. 49) выполняются и условие равновесия, и условие (36) потери устойчивости. Измеряя отрезок OR в масштабе оси абсцисс, находим искомую величину эксцентриситета a . Длина отрезка OP определяет величину прогиба y_0 в момент потери устойчивости. Для пользования удобнее на оси абсцисс откладывать не прогиб y_0 , а пропорциональную ему на основании (34) величину.

$$\Delta = \epsilon_1 + \epsilon_2, \quad (37)$$

представляющую собой сумму абсолютных величин относительных удлинений крайних волокон поперечного сечения стержня.

По оси ординат при этом откладывается величина $\frac{Mh}{J}$, где J — момент инерции поперечного сечения, или, для прямоугольного

сечения, $\frac{M}{bh^2}$. Таким образом, полученный график становится пригодным для всех геометрически подобных сечений. Уравнение (35) принимает вид

$$\frac{Mh}{J} = \sigma_0 \left(\frac{\lambda^2}{\pi^2} \Delta + \frac{ah}{i^2} \right), \quad (38)$$

или, для прямоугольного сечения,

$$\frac{M}{bh^2} = \sigma_0 \left(\frac{\lambda^2}{12\pi^2} \Delta + \frac{\nu}{6} \right), \quad (39)$$

где $\nu = \frac{a}{k}$,

k — ядровое расстояние.

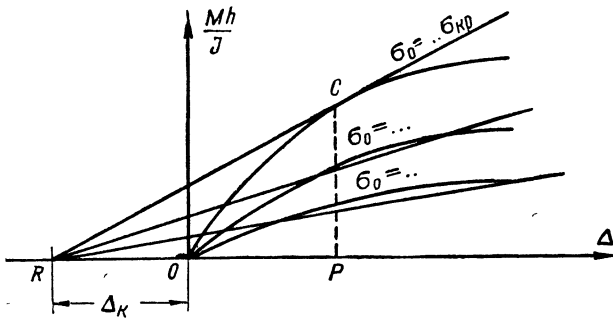


Рис. 50. Схема номограммы для определения $\sigma_{кр}$ при известных λ и ν

Длину отрезка OR на графике находим, приравнявая нулю правую часть уравнения (38):

$$\Delta_k = - \frac{ah}{i^2} \pi^2 \quad (40)$$

или правую часть уравнения (39) для прямоугольного поперечного сечения

$$\Delta_k = - \frac{2\pi^2}{\lambda^2} \nu. \quad (41)$$

Знак минус указывает, что отрезок OR откладывается влево от начала координат.

Применение метода касательных предполагает построение ряда кривых $\frac{Mh}{J}$ или $\frac{M}{bh^2}$ в функции от $\Delta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ для разных значений осевого напряжения σ_0 (рис. 50). Пусть требуется определить величину критического напряжения $\sigma_{кр}$ для стержня прямоугольного сечения при заданной величине эксцентриситета

ν и при заданной гибкости λ . Прежде всего по формуле (41) находим Δ_k и наносим точку R на график. Затем через эту точку проводим пучок прямых (39), соответствующих значениям σ_0 , для которых построены кривые зависимости $\frac{M}{bh^2}$ от Δ . Если одна из этих прямых касается соответствующей кривой, то осевое напряжение, для которого обе эти линии построены, является критическим.

На чертеже (рис. 51) представлен построенный Рошем график

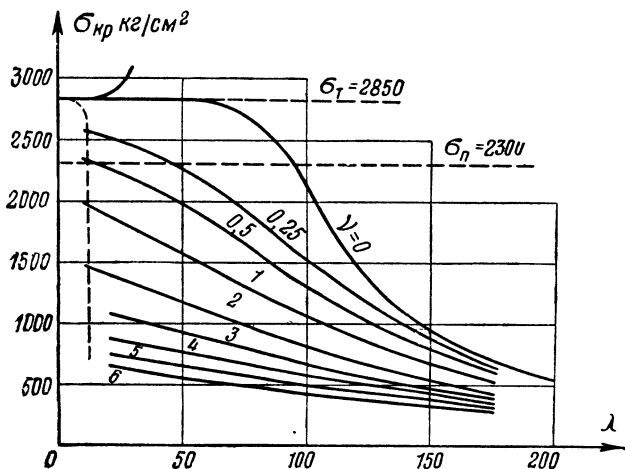


Рис. 51. График $\sigma_{кр}(\lambda)$ по Рошу (прямоугольное сечение)

$\sigma_{кр}(\lambda)$ для стержня прямоугольного поперечного сечения из стали, которая характеризуется следующими показателями: $E = 2\,150\,000 \text{ кг/см}^2$, $\sigma_T = 2\,850 \text{ кг/см}^2$, $\sigma_n = 2\,300 \text{ кг/см}^2$.

На этом графике показана ветвь кривой критического напряжения при центральном сжатии, лежащая выше предела текучести. Пунктирная линия на графике определяет точки начала стадии упрочнения.

В смысле трудоемкости вычислений метод касательных примерно эквивалентен методу огибающих. И в том, и в другом случае точность результата определяется тщательностью и масштабом графических построений.

Общим недостатком рассмотренных приближенных методов является применимость их исключительно в случае внецентренного сжатия шарнирно опертых стержней, в то время как метод численного интегрирования допускает решение задач более широкого класса.

РАСЧЕТ СТАЛЬНОГО СЖАТОГО И СЖАТО-ИЗОГНУТОГО СТЕРЖНЯ

§ 29. КОЭФФИЦИЕНТ ЗАПАСА ПРИ РАСЧЕТЕ СТАЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Проблема практического расчета сжатого и сжато-изогнутого стального стержня не может рассматриваться и решаться вне связи с более общей проблемой расчета стальных конструкций. Целью такого расчета является установление размеров поперечных сечений элементов конструкции, обеспечивающих необходимую прочность и удобство эксплуатации сооружения при заданной нагрузке, или же, наоборот, установление величины нагрузки, которая может быть безопасно допущена при заданных размерах поперечных сечений.

Для решения этой задачи необходимо прежде всего установить расчетные интенсивности нагрузок, которые должны быть положены в основу исчисления прочности. Нормативные данные устанавливают обязательные при расчете величины некоторых нагрузок и содержат указания по учету динамического воздействия подвижной нагрузки, данные по атмосферным нагрузкам в зависимости от района возведения сооружения и т. д. Следующим этапом устанавливается сочетание внешних силовых воздействий, которое должно быть положено в основу расчета, т. е. некая расчетная комбинация нагрузок, действующих на сооружение. Пользуясь методами теории сооружений, следует, исходя из этой системы расчетных нагрузок и принимая более или менее близкую к действительности расчетную схему сооружения, определить усилия, возникающие в каждом из элементов конструкции.

Количественная оценка прочности требует исследования работы сооружения вплоть до момента его разрушения. Задача установления предельного состояния, соответствующего разрушению конструкции в указанном выше смысле, сводится к выбору признака или группы признаков, которые характеризуют собой невозможность дальнейшей эксплуатации сооружения. Очевидно, наступление предельного состояния возможно в том случае, если будет иметь место одно или несколько из нижеследующих обстоятельств:

- а) фактические нагрузки превысят расчетные;
- б) фактическая схема работы сооружения будет отличаться от схемы, положенной в основу расчета;
- в) механические свойства материала окажутся ниже тех, которые приняты в расчете;
- г) размеры поперечных сечений элементов окажутся меньше указанных в расчете.

Наличие этих факторов в той или иной мере предопределяется дефектами материала, дефектами изготовления и монтажа конструкций, дефектами эксплуатации, а также и дефектами расчета. Не вдаваясь в более детальное рассмотрение этого вопроса, ограничимся изложением простейших принятых в теории стальных сооружений допущений.

Предположим, что влияние перечисленных выше факторов, благодаря которым возможно наступление предельного состояния, может быть учтено одним из них, именно превышением фактических нагрузок над расчетными. Далее примем, что система разрушающих нагрузок полностью подобна системе расчетных нагрузок. Предположим, следовательно, что разрушение сооружения происходит в результате равномерного возрастания всех нагрузок, составляющих расчетную комбинацию.

При этих предпосылках система расчетных нагрузок может быть оценена некоторым числом q , а система разрушающих нагрузок числом Q . Условие прочности выражается неравенством

$$q < Q.$$

Так как числа q и Q могут быть подсчитаны лишь с известной степенью точности, то следует учесть также и влияние соответствующих абсолютных погрешностей Δq и ΔQ . Условие, выражающее полную гарантию неразрушимости сооружения, записывается в виде

$$q + \Delta q < Q - \Delta Q. \quad (1)$$

Величины Δq и ΔQ неизвестны и могут быть оценены лишь приближенно. Наиболее логичным является предположение, что при прочих равных условиях величина погрешности пропорциональна величине разыскиваемого фактора. Тогда можно принять

$$\Delta q = kq; \quad \Delta Q = KQ,$$

где k и K — некоторые коэффициенты, меньшие единицы. Условие прочности (1) выражается теперь так:

$$q \frac{1+k}{1-K} < Q$$

или

$$\frac{Q}{q} > \frac{1+k}{1-K}. \quad (2)$$

Условимся называть отношение разрушающей нагрузки Q к расчетной нагрузке q *расчетным коэффициентом запаса*:

$$\eta = \frac{Q}{q}, \quad (3)$$

тогда условие прочности принимает вид

$$\eta = \frac{Q}{q} \geq [\eta]. \quad (4)$$

Здесь $[\eta]$ — нормативный коэффициент запаса, величина которого постоянна для данного материала, класса капитальности сооружения и класса расчетной комбинации нагрузок. Очевидно, что в силу (2) величина нормативного коэффициента запаса должна удовлетворять условию

$$[\eta] > \frac{1+k}{1-K}. \quad (5)$$

Таким образом, величина нормативного коэффициента запаса зависит от величины погрешностей, возникающих при вычислении разрушающей нагрузки Q и расчетной нагрузки q . Чем стабильнее механические свойства материала, чем благоприятнее для сооружения условия эксплуатации и чем точнее расчет, тем ниже может быть выбрана величина нормативного коэффициента запаса.

Проблема разработки методики практического расчета элементов сооружения распадается на следующие три этапа:

- 1) установление характеристики предельного состояния;
- 2) выбор величины нормативного коэффициента запаса;
- 3) обоснование структуры расчетных формул.

Установление характеристики предельного состояния является в известной мере произвольным и может быть выполнено, исходя из нескольких, принципиально отличающихся друг от друга предпосылок. При этом требуется, однако, чтобы наступление этого предельного состояния возможно было установить расчетом, и желательно, чтобы расчет этот был не слишком сложным.

Теория стальных конструкций в качестве базы для расчета обычно принимает гипотезу об упругой работе материала вплоть до момента появления напряжений предела текучести. Такое допущение несколько преувеличивает показатели прочности стали, но зато весьма существенно упрощает задачу расчета. В этом случае в качестве характеристики предельного состояния принимается достижение фибровым напряжением в наиболее напряженном сечении конструкции предела текучести σ_T . Это состояние условимся называть «опасным состоянием». При дальнейшем возрастании нагрузки сооружение вступает в стадию упруго-пластической работы. Наиболее

простой расчет конструкции при неупругой работе стали возможен на основе гипотезы идеального упруго-пластического материала, согласно которой материал, следуя закону Гука при $\sigma < \sigma_T$, обладает свойством абсолютной пластичности при $\sigma = \sigma_T$. Выводы теории пластических деформаций, основанной на этой гипотезе, показали, что достижение фибровыми напряжениями предела текучести отнюдь не означает исчерпания несущей способности сооружения.

Принимая в качестве предельного состояния опасное состояние, допустим, что в наиболее напряженной точке сооружения фибровое напряжение от системы расчетных нагрузок q равно σ , тогда в предельном (опасном) состоянии напряжение в этой же точке будет равно σ_T . Предельному состоянию соответствует система разрушающих нагрузок Q . Для линейных задач строительной механики имеет место прямая пропорциональность между внешними нагрузками и напряжениями, следовательно:

$$\frac{Q}{q} = \frac{\sigma_T}{\sigma}.$$

Отсюда следует, что условие прочности (4) в напряжениях может быть записано так:

$$\eta = \frac{\sigma_T}{\sigma} \geq [\eta] \quad (6)$$

Обычно условие прочности записывается в форме

$$\sigma \leq [\sigma], \quad (7)$$

где $[\sigma]$ — допускаемое нормальное напряжение, величина которого на основании (6) связана с пределом текучести σ_T и нормативным коэффициентом запаса $[\eta]$ при помощи соотношения

$$\sigma_T = [\sigma][\eta]. \quad (8)$$

Однако для нелинейных систем, к которым относится и сжато-изогнутый стержень, пропорциональность между нагрузками и напряжениями не имеет места. Поэтому проблема расчета сжато-изогнутого стержня является более сложной и требует специального рассмотрения. Формулы (6) и (7) в этом случае неприменимы.

Действующие в СССР стандарты и нормы проектирования стальных конструкций не указывают явно величины коэффициента запаса, но регламентируют величину допускаемого напряжения $[\sigma]$.

Соответствующее значение нормативного коэффициента запаса может быть найдено на основании соотношения (8):

$$[\eta] = \frac{\sigma_T}{[\sigma]}.$$

Табл. 9 содержит величины допускаемого напряжения для основных марок строительных сталей по действующим нормативным источникам.

Таблица 9

Допускаемое напряжение на растяжение, сжатие и изгиб $[\sigma]$ в кг/см^2 для основных строительных сталей

Воздействия	Ст. 0, Ст. 2	Ст. 3	НЛ1	НЛ2
Основные	1 400	1 600	2 000	2 250
Основные плюс дополнительные . .	1 600	1 800	2 300	2 600
Источник	НитУ 1-46		У 70-51	

Следует различать первый предел допускаемых напряжений, применяемый при действии основных нагрузок, и второй предел допускаемых напряжений, применяемый при действии основных и дополнительных нагрузок. Все приведенные в табл. 8 данные относятся к сооружениям II класса капитальности, т. е. к капитальным сооружениям, рассчитанным на длительный срок эксплуатации.

Изложенные выше соображения являются в известной мере элементарными. Более строгое логическое обоснование понятий неразрушимости сооружения и коэффициента запаса возможно на базе теории вероятностей. При этом каждая из величин, входящих в формулу оценки прочности, характеризуется своей кривой распределения. Если кривые распределения установлены статистическим путем, то величина коэффициента запаса может быть математически обоснована.

Постановка задачи научного обоснования понятий неразрушимости сооружений и коэффициента запаса является заслугой советских ученых Н. С. Стрелецкого¹, А. Р. Ржаницына² и др.

Значительным шагом вперед в рассматриваемой области является разработка в Советском Союзе новой методики расчета сооружений по предельному состоянию. Основная идея этой методики заключается в том, что расчетное условие прочности составляется не для эксплуатационных, а для предельных (разрушающих) нагрузок. Понятие коэффициента запаса исключается и взамен вводятся три новых понятия:

1) коэффициент перегрузки, учитывающий изменчивость нагрузок;

¹ Первая работа Н. С. Стрелецкого на эту тему относится к 1926 г., последующие его работы опубликованы в 1935, 1937, 1938 и 1947 гг.

² А. Р. Ржаницын, Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов, Стройвоенмориздат, 1949.

2) коэффициент однородности, учитывающий изменчивость механических свойств материала;

3) коэффициент условий работы, учитывающий особенности работ конструкций или их элементов.

Условие прочности может быть записано в следующем виде:

$$k_1 S_1 + k_2 S_2 + \dots \leq m \Phi n R^n. \quad (9)$$

Здесь S_1, S_2, \dots — усилия от нормативных (эксплуатационных) нагрузок;

k_1, k_2, \dots — коэффициенты перегрузки, принимаемые различными для разных видов нагрузки;

Φ — геометрическая характеристика поперечного сечения элемента (например, площадь или момент сопротивления);

R^n — нормативное сопротивление (предел текучести);

m — коэффициент условий работы ($m \leq 1$);

n — коэффициент однородности материала.

Если назвать расчетным усилием S произведение нормативного усилия на соответствующий коэффициент перегрузки

$$S = \sum k_i S_i$$

и расчетным сопротивлением произведение нормативного сопротивления на коэффициент однородности

$$R = n R^n,$$

то условие прочности (9) примет более компактную форму:

$$S \leq m \Phi R. \quad (10)$$

Помимо расчета по несущей способности (первое предельное состояние), новая методика предусматривает для стальных конструкций также расчет по развитию чрезмерных деформаций от нормативных (эксплуатационных) нагрузок (второе предельное состояние).

Преимущество новой методики заключается прежде всего в установлении дифференцированных коэффициентов перегрузки для разных видов нагрузки, что обеспечивает более правильный подход к назначению сечений элементов конструкции.

В следующих параграфах рассматриваются практические методы расчета сжатого и сжато-изогнутого стержня, причем для последнего учитывается возможность потери устойчивости только лишь в плоскости действия изгибающего момента.

§ 30. ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДИКИ РАСЧЕТА ЦЕНТРАЛЬНО СЖАТОГО СТЕРЖНЯ

Прямолинейный центрально сжатый стержень представляет собой идеальную схему, которая в реальных условиях никогда не может осуществиться. Все применяемые в строительных конструкциях стержни, которые по чертежам должны быть прямо-

линейными и центрально сжатыми, в натуре неизбежно имеют отклонения от прямолинейности, а сжимающая сила всегда имеет эксцентриситет. Это обстоятельство существенно влияет на несущую способность стальных стержней, которые мы условно называем центрально сжатыми.

Объединим начальное искривление оси стержня и случайное отклонение сжимающей силы от центра тяжести сечения понятием случайного (начального) эксцентриситета. Влияние случайных эксцентриситетов должно учитываться при расчете центрально сжатого стержня. Отсюда следует, что центрально сжатый стержень должен рассчитываться как сжато-изогнутый, причем величина случайного эксцентриситета должна быть принята в соответствии с ожидаемой степенью точности изготовления конструкций.

Примем в качестве характеристики предельного состояния достижение фибровым напряжением предела текучести и будем считать, что вплоть до наступления этого опасного состояния сталь работает вполне упруго.

Назовем опасным напряжением $\sigma_{оп}$ то значение осевого напряжения

$$\sigma_0 = \frac{N}{F}, \quad (11)$$

при котором фибровое напряжение достигает предела текучести.

Для внецентренно сжатого стержня величина опасного напряжения может быть найдена из уравнения (см. главу третью)

$$\sigma_{оп} \left(1 + \frac{\nu}{\cos \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{\sigma_{оп}}{E}}} \right) = \sigma_T. \quad (12)$$

Здесь λ — гибкость стержня, равная отношению длины шарнирно опертого стержня l к радиусу инерции i поперечного сечения стержня

$$\lambda = \frac{l}{i}; \quad (13)$$

ν — относительный эксцентриситет, равный отношению плеча сила a к ядровому растяжению k

$$\nu = \frac{a}{k}. \quad (14)$$

Естественно предположить, что величина случайного отклонения сжимающей силы от центра тяжести сечения пропорциональна высоте сечения или же ядровому расстоянию. На основании статистической обработки экспериментальных данных можно принять это отклонение равным

$$a_{сл} = 0,06 k. \quad (15)$$

Согласно техническим условиям изготовления¹ допускаемая стрелка прогиба (кривизна) колбыны, элемента фермы и т. п. равняется $1/1000$ длины, но не должна превышать 15 мм. На основании этого можно принять

$$a_{cl} = 0,001 l. \quad (16)$$

Вопрос о том, какое из двух значений случайного эксцентриситета — (15) или (16). — должно быть положено в основу расчета, наиболее просто решается предложением Ф. С. Ясинского учитывать одновременно как случайное отклонение сжимающей силы, так и начальную непрямолинейность стержня². При этом, разумеется, в расчет должны быть введены не максимальные величины (15) и (16), а некоторые средние значения.

Нормы СССР принимают в основу расчета эксцентриситеты, пропорциональные длине стержня. Анализ показывает, что из двух значений — (15) и (16) — второе значение является решающим для практически важных не слишком малых гибкостей.

Нормативные значения случайных эксцентриситетов будут рассмотрены в следующем параграфе. Для примерной оценки опасных напряжений будем исходить из величины случайного эксцентриситета (16). Относительный эксцентриситет равен

$$\nu_{cl} = \frac{i}{k} \cdot \frac{\lambda}{1000}, \quad (17)$$

и формула (12) принимает вид

$$\nu_{cl} = \frac{i}{k} \cdot \frac{\lambda}{1000} = \left(\frac{\sigma_T}{\sigma_{оп}} - 1 \right) \cos \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{\sigma_{оп}}{E}}. \quad (18)$$

Величина опасного напряжения зависит от отношения радиуса инерции к ядровому расстоянию. В стальных конструкциях применяются как сосредоточенные (крестовое сечение), так и рассеянные (двутавр, швеллер) профили; прямоугольное сечение занимает некоторое промежуточное положение. Примем среднее значение

$$\frac{i}{k} = \sqrt{3} = 1,732,$$

соответствующее случаю прямоугольного сечения, и вычислим опасное напряжение $\sigma_{оп}$ из соотношения (18). При фиксированном значении предела текучести опасное напряжение будет функцией гибкости стержня. Зависимость $\sigma_{оп}(\lambda)$ для Ст. 3 при $\sigma_T = 2400 \text{ кг/см}^2$ представлена на графике (рис. 52).

Предельная нагрузка на стержень равна $N_{пр} = \sigma_{оп} F$. Лопающаяся нагрузка должна быть в $[\eta]$ раз меньше предельной,

¹ Технические условия на производство и приемку общестроительных и специальных работ, разд. VIII, 1948.

² Ф. С. Ясинский, Собрание сочинений, т. I. 1902.

где $[\eta]$ — нормативный коэффициент запаса при расчете стальных конструкций, единый для всех видов силовых воздействий. Отсюда получаем условие прочности

$$\sigma_0 = \frac{N}{F} \leq \frac{\sigma_{оп}}{[\eta]}. \quad (19)$$

Примем во внимание зависимость (8) между нормативным коэффициентом запаса, пределом текучести и допускаемым напряжением; тогда условие прочности (19) запишется в виде

$$\sigma_0 = \frac{N}{F} \leq [\sigma] \varphi. \quad (20)$$

Здесь коэффициент снижения допускаемого напряжения φ равен

$$\varphi = \frac{\sigma_{оп}}{\sigma_T}; \quad (21)$$

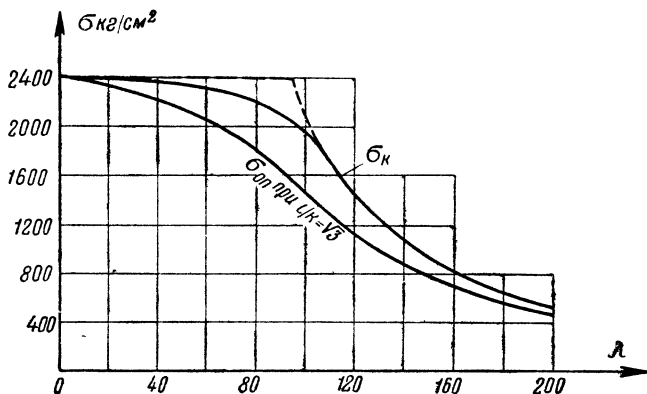


Рис. 52. Опасное напряжение $\sigma_{оп}$ по уравнению (18)

при $\frac{i}{k} = \sqrt{3}$ и критическое напряжение при центральном сжатии σ_k (Ст. 3, $\sigma_T = 2400 \text{ кг/см}^2$)

величина его для данной марки стали зависит от гибкости стержня λ .

Игнорируя влияние случайного эксцентриситета и принимая в качестве характеристики предельного состояния достижение осевым напряжением критического значения σ_k , мы получаем условие устойчивости

$$\sigma_0 = \frac{N}{F} \leq [\sigma] \frac{\sigma_k}{\sigma_T}$$

с коэффициентом запаса, равным нормативному значению $[\eta]$.

Учет влияния случайного эксцентриситета можно рассматривать как введение специального коэффициента запаса

$$\eta_{\text{сп}} = \frac{\sigma_{\text{к}}}{\sigma_{\text{оп}}}, \quad (22)$$

равного отношению критического напряжения к опасному напряжению. Специальный коэффициент запаса является функцией гибкости. Суммарный коэффициент запаса при расчете центрально сжатого стержня равен произведению нормативного коэффициента запаса на специальный коэффициент запаса:

$$\eta_0 = \eta_{\text{сп}} [\eta]. \quad (23)$$

Суммарный коэффициент запаса равен отношению критического напряжения к допускаемому напряжению при центральном сжатии

$$\eta_0 = \frac{\sigma_{\text{к}}}{\varphi [\sigma]}. \quad (24)$$

Зависимость критических напряжений $\sigma_{\text{к}}$ при центральном сжатии от гибкости λ можно строить на основе двух различных предпосылок. Если исходить из представления об идеальном упруго-пластическом материале, то график $\sigma_{\text{к}}(\lambda)$ будет представлять собой гиперболу Эйлера

$$\sigma_{\text{э}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (25)$$

на участке $\lambda > \lambda_{\text{т}}$, где граничная гибкость

$$\lambda_{\text{т}} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{т}}}},$$

и прямую $\sigma_{\text{к}} = \sigma_{\text{т}}$ на участке $0 < \lambda < \lambda_{\text{т}}$.

Вторая предпосылка основана на учете фактического графика $\sigma(\epsilon)$ для стали (переходная кривая). Область действия формулы Эйлера определяется неравенством $\lambda > \lambda_{\text{п}}$, где граничная гибкость соответствует пределу пропорциональности

$$\lambda_{\text{п}} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{п}}}}. \quad (26)$$

На участке $0 < \lambda < \lambda_{\text{п}}$ график $\sigma_{\text{к}}(\lambda)$ представляет собой плавную кривую. При $\lambda = 0$ критическое напряжение равно пределу текучести $\sigma_{\text{к}} = \sigma_{\text{т}}$, при $\lambda = \lambda_{\text{т}}$ кривая сопрягается с эйлеровой гиперболой. Очертание графика $\sigma_{\text{к}}(\lambda)$ на этом участке зависит, как было показано в главе четвертой, от формы поперечного сечения, влиянием которой можно пренебречь.

Для сравнения с величиной опасных напряжений на рис. 52 нанесены также графики $\sigma_{\text{к}}(\lambda)$, основанные на двух рассмотренных предпосылках.

Табл. 10 содержит значения критических напряжений $\sigma_{\text{к}}$ (найденных по второй предпосылке — с учетом фактической

Коэффициенты φ и $\eta_{сп}$, вычисленные исходя из значений $\sigma_{оп}$
по уравнению (18) при $\frac{i}{k} = \sqrt{3}$ (Ст. 3, $\sigma_T = 2400 \text{ кг/см}^2$)

λ	σ_K	$\sigma_{оп}$	$\frac{\sigma_K}{\sigma_T}$	φ	$\eta_{сп}$
0	2 400	2 400	1,000	1,000	1,000
20	2 388	2 315	0,995	0,965	1,032
40	2 352	2 108	0,980	0,920	1,065
60	2 290	2 042	0,954	0,851	1,121
80	2 188	1 778	0,912	0,741	1,231
100	1 996	1 438	0,832	0,599	1,388
120	1 439	1 122	0,600	0,468	1,282
140	1 057	877	0,440	0,365	1,205
160	810	697	0,338	0,290	1,162
180	640	564	0,267	0,235	1,135
200	518	465	0,216	0,194	1,114

работы стали), опасных напряжений $\sigma_{оп}$ при $\frac{i}{k} = \sqrt{3}$, коэффициента φ по формуле (21) и специального коэффициента запаса по формуле (22) для Ст. 3 при $\sigma_T = 2400 \text{ кг/см}^2$. График зависимости специального коэффициента запаса $\eta_{сп}$ от гибкости λ дан на рис. 53.

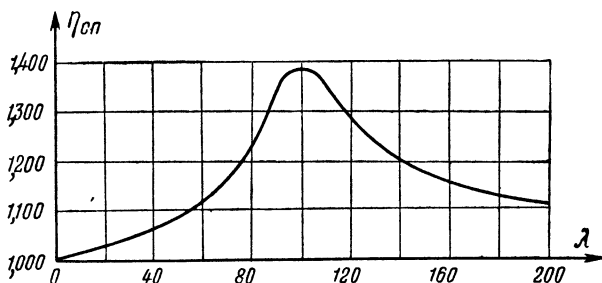


Рис. 53. График зависимости специального коэффициента запаса $\eta_{сп}$ от гибкости λ по уравнению (18)

$$\text{при } \frac{i}{k} = \sqrt{3}$$

Таким образом, задача расчета центрально сжатого стержня сводится к использованию простой формулы (20). Функция $\varphi(\lambda)$ равна единице при $\lambda = 0$ и монотонно убывает по мере возрастания гибкости (см. § 31).

§ 31. РАСЧЕТ ЦЕНТРАЛЬНО СЖАТОГО СТЕРЖНЯ ПО ДЕЙСТВУЮЩИМ НОРМАМ

Согласно действующим нормам расчет сжатого стального стержня производится по формуле

$$\sigma = \frac{N}{F_{\varphi}} \leq [\sigma]. \quad (27)$$

Само собой разумеется, что подсчитанное по формуле (27) напряжение σ является условным; оно не совпадает с тем напряжением, которое фактически развивается в сжатом стержне.

Структура формулы (27) в известной мере аналогична структуре расчетной формулы для случая растяжения

$$\sigma = \frac{N}{F_{\text{нт}}} \leq [\sigma], \quad (28)$$

где рабочей площадью является площадь «нетто» сечения.

Значения коэффициента φ [см. формулу (20)] в функции от гибкости λ , предписываемые различными нормативными источниками СССР, не являются вполне совпадающими. Мы сравним данные следующих официальных изданий:

1) «Технические условия и нормы на проектирование промышленных зданий», 1934 г. (НитУ 34);

2) «Стальные конструкции. Нормы проектирования», ГОСТ 960-41 (ГОСТ 41);

3) «Указания по проектированию и применению стальных конструкций в условиях военного времени», 1942 г. (У 42);

4) «Конструкции стальные. Нормы проектирования», ГОСТ 960-46 (ГОСТ 46);

5) «Нормы и технические условия проектирования стальных конструкций» (НитУ1-46);

При построении функции $\varphi(\lambda)$ ТУиН 34 зависимость критического напряжения при центральном сжатии от гибкости для стали марки Ст. 3 была принята:

а) на участке $0 < \lambda < 60$ — прямая линия;

$$\sigma_k = \sigma_r = 2400 \text{ кг/см}^2;$$

б) на участке $60 < \lambda < 120$ — плавная переходная кривая параболического типа;

$$\sigma_{kp} = a + b\lambda - c\lambda^2,$$

где a , b и c — положительные постоянные;

в) на участке $\lambda > 120$ — эйлерова гипербола;

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

Специальный коэффициент запаса принимался в виде функции $\eta_{\text{сп}}(\lambda)$, имеющей крайние значения $\eta_{\text{сп}}(0) = 1,00$; $\eta_{\text{сп}}(200) = 1,15$ и максимальное значение $\eta_{\text{сп}}(100) = 1,46$.

Значения коэффициента φ по действующим нормам приведены в табл. 11.

Таблица 11

Значения коэффициента φ уменьшения допускаемого напряжения при центральном сжатии по действующим нормам

Гибкость λ	Ст. 3			НЛ1, НЛ2
	ТУиН 34	ГОСТ 41 ГОСТ 46	У 42	У 51
0	1,000	1,000	1,000	1,00
10	0,990	0,990	0,985	0,98
20	0,970	0,960	0,965	0,95
30	0,935	0,940	0,945	0,93
40	0,893	0,920	0,922	0,90
50	0,846	0,890	0,892	0,83
60	0,798	0,860	0,860	0,78
70	0,741	0,810	0,810	0,71
80	0,683	0,750	0,750	0,60
90	0,625	0,690	0,685	0,54
100	0,568	0,600	0,600	0,45
110	0,511	0,520	0,520	0,39
120	0,454	0,450	0,450	0,33
130	0,402	0,400	0,400	0,24
140	0,353	0,360	0,360	0,25
150	0,316	0,320	0,320	0,29
160	0,287	0,290	0,290	0,21
170	0,261	0,260	0,260	0,19
180	0,236	0,230	0,230	0,17
190	0,214	0,210	0,210	0,15
200	0,191	0,190	0,190	0,13

Как видно из таблицы, действующие нормы дают довольно стабильные значения φ . Колебания значений φ для одной и той же гибкости по различным нормам не превышают 10%. Значения коэффициента φ по ГОСТ 41, ГОСТ 46 и НитУ 46 совпадают.

Предписываемые ГОСТ 46 значения φ оказываются, как легко видеть из сравнения данных табл. 10 и 11, весьма близкими к значениям, найденным в предыдущем параграфе, исходя из вычисления опасных напряжений при случайном эксцентриситете

$a_{cl} = \frac{l}{1000}$ и $\frac{i}{k} = \sqrt{3}$. Наибольшее расхождение имеет место при $\lambda = 90$ и составляет приблизительно 3%.

Если заданы значения коэффициента φ , то на основании (24) и (25) могут быть найдены соответствующие значения случайного эксцентриситета:

$$\nu_{cl} = \left(\frac{1}{\varphi} - 1 \right) \cos \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{\varphi \sigma_T}{E}}. \quad (29)$$

Зависимость случайного эксцентриситета от гибкости при значениях φ согласно ГОСТ 46 графически изображается кривой линией, исходящей из начала координат (рис. 54). Для сравнения на том же графике дана прямая линия

$$v_{сл} = \frac{\sqrt{3}}{1\,000} \lambda,$$

на основе которой были найдены значения φ , приведенные в табл. 10.

Табл. 11 содержит также значения коэффициента φ для низколегированных сталей НЛ1 и НЛ2. Эти значения даны в

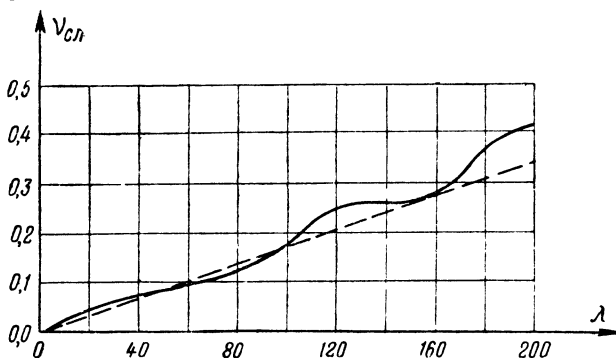


Рис. 54. Величина случайного эксцентриситета $v_{сл}$ в функции от гибкости согласно уравнению (29) при λ

по ГОСТ-46 (сплошная линия) и $v_{сл} = \frac{\sqrt{3}}{1\,000} \lambda$

(пунктирная линия)

соответствии с «Указаниями по проектированию стальных конструкций из стали марок НЛ1 и НЛ2» У 70-51 (У 51).

Помимо формулы (27), по действующим нормам, проверку прочности сжатых стержней производят также по формуле (28). В качестве критерия прочности здесь принимается величина осевого напряжения, возникающая в наиболее ослабленном сечении стержня. Очевидно, что проверка по формуле (28) является решающей только в том случае, если площадь нетто стержня, т. е. площадь поперечного сечения, подсчитанная с учетом ослабления заклепочными или иными отверстиями, окажется меньше произведения полной площади брутто на коэффициент φ , т. е. $F_{нт} < F\varphi$.

§ 32. ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДИКИ РАСЧЕТА СЖАТО-ИЗОГНУТОГО СТЕРЖНЯ

В соответствии с общей предпосылкой расчета элементов стальных конструкций в качестве предельного состояния для сжато-изогнутого стержня примем «опасное состояние», при

котором фибровые напряжения в наиболее напряженном сечении достигают предела текучести. Этим самым проблема практического расчета сжато-изогнутого стержня определяется как проблема прочности, а не как проблема устойчивости. Это обстоятельство ни в какой мере не снижает ценности результатов, полученных при исследовании устойчивости сжато-изогнутого стержня в главах третьей и четвертой. Так как потеря устойчивости сжато-изогнутого стержня происходит при осевых напряжениях, превышающих опасные напряжения, то, выбирая в качестве характеристики предельного состояния достижение фибровыми напряжениями предела текучести, мы исключаем из рассмотрения явление потери устойчивости, ибо всегда имеет место неравенство $\sigma_{кр} > \sigma_{оп}$.

Тот факт, что несущая способность сжато-изогнутого стержня определяется на самом деле не достижением фибровыми напряжениями предела текучести, а критическим состоянием стержня в момент потери устойчивости, указывает на наличие некоторых дополнительных запасов прочности, не используемых при существующих методах расчета.

Фибровое напряжение в наиболее напряженном сечении сжато-изогнутого стержня от расчетных нагрузок равно

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{W}, \quad (30)$$

где N — сжимающая сила;

M — изгибающий момент;

F — площадь;

W — момент сопротивления поперечного сечения стержня.

Мы предполагаем пока, что наибольшее напряжение имеет место со стороны сжатого волокна, как это бывает в подавляющем большинстве случаев.

Достижение опасного состояния происходит в результате увеличения расчетных нагрузок. В соответствии с соображениями, изложенными ранее, мы предполагаем, что если сжимающая сила увеличилась по сравнению с расчетной в η раз, то и поперечная нагрузка увеличивается в то же число η раз. При этом первый член формулы (30) возрастает равно в η раз, в то время как второй член не подчиняется уже этому закону прямой пропорциональности, так как на величину изгибающих моментов оказывают влияние деформации стержня.

Используем полученные в главе второй результаты, согласно которым величина изгибающего момента в сечении сжато-изогнутого стержня равна

$$M = M \phi, \quad (31)$$

где M — изгибающий момент, найденный без учета влияния сжимающей силы;

ψ — коэффициент, больший единицы и зависящий от величины сжимающей силы, от гибкости стержня, а также от характера поперечной нагрузки на стержень.

Примем далее для осевого напряжения и для напряжения изгиба от расчетных нагрузок обозначения

$$\sigma_o = \frac{N}{F}; \quad \sigma_n = \frac{M}{W}; \quad (32)$$

тогда формула (30) может быть записана в виде

$$\sigma = \sigma_o + \sigma_n \psi(\lambda, \sigma_o). \quad (33)$$

В случае, например, внецентренно сжатого шарнирно опертого стержня имеем

$$\psi(\lambda, \sigma_o) = \frac{1}{\cos \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{\sigma_o}{E}}}. \quad (34)$$

При возрастании сжимающей силы и поперечной нагрузки на стержень в η раз фибровое напряжение будет равно

$$\sigma = \eta \sigma_o + \eta \sigma_n \psi(\lambda, \eta \sigma_o). \quad (35)$$

Пусть известны величины σ_o и σ_n . Тогда из условий достижения фибровым напряжением предела текучести получаем уравнение для определения величины коэффициента запаса:

$$\eta \sigma_o + \eta \sigma_n \psi(\lambda, \eta \sigma_o) = \sigma_T. \quad (36)$$

Уравнение (36) является трансцендентным. Решение его достигается путем подбора корней. Задаваясь некоторым сечением и вычисляя σ_o и σ_n , мы имеем возможность по уравнению (36) найти коэффициент запаса η . Путем ряда попыток можно подобрать такое сечение, для которого вычисленный коэффициент запаса будет достаточно близок к нормативному коэффициенту запаса $[\eta]$. Применение такой методики расчета иллюстрируется следующим примером.

Пример. Требуется подобрать сечение внецентренно сжатого шарнирно опертого стержня. Длина стержня $l = 11,4$ м. Сжимающая сила $N = 42$ т приложена с эксцентриситетом $a = 6$ см. Материал стержня — сталь марки Ст. 3; нагрузки — основные; допускаемое напряжение $[\sigma] = 1\,600$ кг/см².

После ряда пробных попыток находим сечение — двутавр № 30а, для которого коэффициент запаса¹ по уравнению (36) приблизительно равен $\eta = 1,55$, в то время как нормативный коэффициент запаса равен

$$[\eta] = \frac{\sigma_T}{[\sigma]} = \frac{2\,400}{1\,600} = 1,50.$$

¹ Предполагается, что возможность потери устойчивости двутавра в плоскости его наименьшей жесткости исключена.

Для проверки правильности найденного значения коэффициента запаса $\eta = 1,55$ вычислим фибровое напряжение по формуле (35). Сначала находим

$$M = Na = 42 \cdot 0,06 = 2,52 \text{ т.м};$$

$$\sigma_0 = \frac{N}{F} = \frac{42\,000}{61,2} = 685 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_n = \frac{M}{W} = \frac{252\,000}{597} = 420 \text{ кг/см}^2;$$

$$\lambda = \frac{l}{i_x} = \frac{1\,140}{12,1} = 94.$$

Затем вычисляем по формуле (34) коэффициент

$$\psi(\lambda, \eta\sigma_0) = \frac{1}{\cos \frac{94}{2} \sqrt{\frac{1,55 \cdot 685}{2\,100\,000}}} \approx 2,04$$

и фибровое напряжение

$$\sigma = 1,55 \cdot 685 + 1,55 \cdot 420 \cdot 2,04 \approx 2\,400 \text{ кг/см}^2.$$

Крупным недостатком такого способа расчета является его сложность, обусловленная необходимостью решать уравнение (36) путем подбора корней. Так как при подборе сечений приходится пробовать несколько различных вариантов и каждый раз требуется решение уравнения (36), то очевидно, что такой способ расчета практически непригоден.

Попытаемся несколько преобразовать изложенный метод расчета. Прежде всего путем почленного деления уравнения (36) на коэффициент запаса η приведем его к виду

$$\sigma_0 + \sigma_n \psi(\lambda, \eta\sigma_0) = \frac{\sigma_r}{\eta},$$

и затем запишем в форме неравенства

$$\sigma_0 + \sigma_n \psi(\lambda, [\eta]\sigma_0) \leq \frac{\sigma_r}{[\eta]},$$

где $[\eta]$ — нормативный коэффициент запаса.

Формально получается при этом соотношение, имеющее вид проверки некоторого условного напряжения

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_n \psi(\lambda, [\eta]\sigma_0) \leq [\sigma]. \quad (37)$$

Поясним смысл этого соотношения. Если подсчитанное по формуле (37) условное напряжение окажется в точности равным допускаемому, то $\eta = [\eta]$ и формула (37) оказывается идентичной с исходным уравнением (36). Если же окажется, что $\sigma > [\sigma]$, то фактический коэффициент запаса меньше нормативного:

$$\eta < [\eta].$$

Наоборот, в случае $\sigma < [\sigma]$ фактический коэффициент запаса больше нормативного:

$$\eta > [\eta].$$

Применяя формулу (39), мы отказываемся от определения действительной величины коэффициента запаса и ограничиваемся только лишь оценкой этой величины по сравнению с величиной нормативного коэффициента запаса. Величина подсчитанного по формуле (37) условного напряжения не дает возможности определить значение фактического коэффициента запаса. Мож-

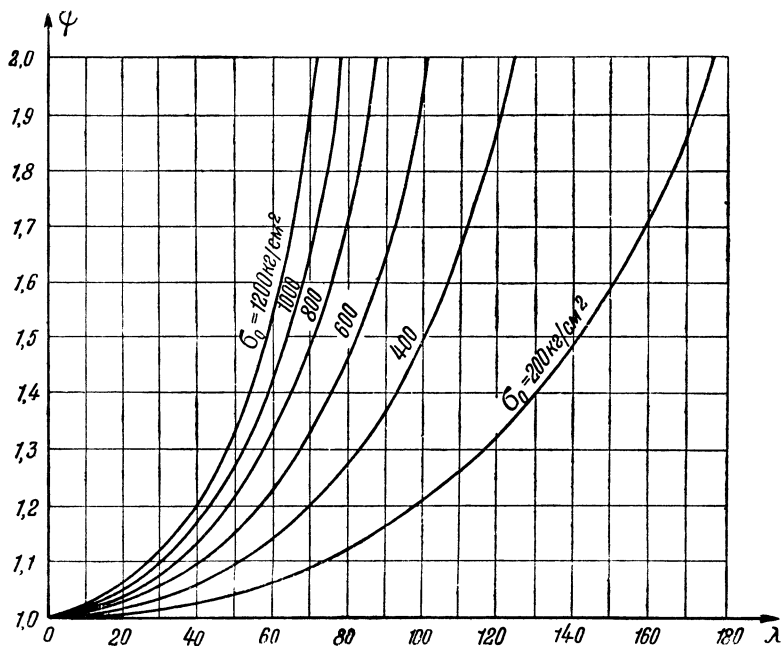


Рис. 55. График зависимости коэффициента $\psi(\lambda, [\eta] \sigma_0)$ от λ и σ_0 для внецентренно сжатого стержня при $[\eta] = 1,5$

но утверждать, что величина фактического коэффициента запаса η заключается между значениями $[\eta]$ и $\frac{\sigma_T}{\sigma}$. Подбор сечений по формуле (37) уже значительно проще. Следует для каждого типа поперечной нагрузки на стержень принимать во внимание соответствующее выражение для $\psi(\lambda, [\eta] \sigma_0)$. Так, например, в случае внецентренно сжатого шарнирно опертого стержня формула (37) принимает вид

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_n \frac{1}{\cos \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{[\eta] \sigma_0}{E}}} \leq [\sigma]. \quad (38)$$

Табл. 12 содержит значения коэффициента ψ для случая внецентренно сжатого стержня

$$\psi(\lambda, [\eta] \sigma_0) = \frac{1}{\cos \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{[\eta] \sigma_0}{E}}}$$

при $[\eta] = 1,5$ в функции от гибкости стержня λ и от осевого напряжения σ_0 . Эта же зависимость иллюстрируется графиком (рис. 55).

Подсчитываемое по формуле (37) или в частном случае (38) условное напряжение нельзя понимать как фактическое напряжение, развивающееся в крайнем волокне сжато-изогнутого стержня при воздействии расчетных нагрузок. Для стержня, обладающего в точности нормативным коэффициентом запаса $[\eta]$, фактическое фибровое напряжение при воздействии расчетных нагрузок будет меньше допускаемого; величина его может быть найдена по формуле (33). В пояснение можно привести график (рис. 56), изображающий зависимость фибрового напряжения σ_f от величины осевого напряжения. Так как для сжато-изогнутого стержня напряжения растут быстрее нагрузок, то указанная зависимость изображается кривой линией, обращенной выпуклостью в сторону оси абсцисс. При $\frac{N}{F} = \sigma_{оп}$

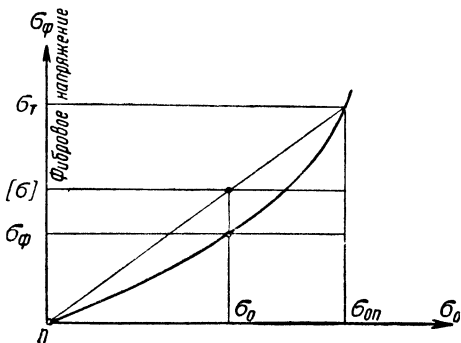


Рис. 56. Схематический график зависимости фибрового напряжения σ_f от осевого напряжения σ_0 для сжато-изогнутого стержня

фибровые напряжения

равны пределу текучести σ_t ; при $\frac{N}{F} = \sigma_0$, т. е. при расчетных нагрузках, фибровые напряжения равны ординате кривой σ_f . Вычисленное по формуле (37) условное напряжение должно быть равно допускаемому $[\sigma]$; очевидно, что имеет место неравенство $\sigma_f < [\sigma]$.

Уравнение (36) наряду с формулой проверки прочности (37) представляют собой строгое с точки зрения принятых предпосылок решение задачи расчета сжато-изогнутого стержня. Однако проблема в целом является гораздо более сложной, и поэтому возможность применения выведенных уравнений должна быть рассмотрена с более общей точки зрения.

[illegible]

Прежде всего необходимо изучить некоторые частные наиболее важные случаи применения формулы проверки прочности (37). В крайнем случае отсутствия сжимающей силы имеем

$$\sigma_0 = 0, \psi = 1, M = M,$$

и формула (37) принимает вид

$$\sigma = \frac{M}{W} \leq [\sigma].$$

Полученное неравенство выражает собой условие прочности в случае изгиба; при уменьшении величины осевых напряжений σ_0 условие прочности все время сохраняет свою силу. Однако в другом крайнем случае, при $\sigma_n = 0$, т. е. при отсутствии изгиба, формула (39) дает

$$\sigma = \sigma_0 = \frac{N}{F} \leq [\sigma].$$

Это условие явно не обеспечивает прочности сжатого стержня, в чем легко убедиться путем сравнения с правильной формулой (20) или же (27). Более того, при некоторой небольшой величине напряжений изгиба σ_n может случиться, что сжато-изогнутый стержень будет удовлетворять неравенству (37) и в то же время не выдерживать проверки по формуле для центрально сжатого стержня:

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{\varphi} \leq [\sigma].$$

Это обстоятельство имеет место в том случае, если расчетное напряжение изгиба σ_n будет меньше, чем напряжение изгиба от случайного эксцентриситета, принятого при вычислении коэффициента φ . Отсюда ясна недостаточность формулы (37) для полного решения задачи расчета сжато-изогнутого стержня.

Помимо проверки по формуле (37), следует произвести еще проверку по формуле (27). Для того чтобы избежать необходимости пользования двумя формулами, можно дополнить формулу (37) условием, согласно которому вводимая в расчет величина напряжений изгиба не должна быть меньше, чем значение

$$\min \sigma_n = \sigma_0 \nu_{cl}, \quad (39)$$

где ν_{cl} — величина случайного эксцентриситета, принятая при построении коэффициента φ .

Величина случайного эксцентриситета ν_{cl} вполне определяется заданием коэффициента при помощи уравнения (29)

При дополнительном условии (39) отпадает необходимость в проверке прочности сжато-изогнутого стержня по формуле (27). Если расчетное напряжение изгиба σ_n окажется меньше минимального значения (39), то в формуле (37) вводится это последнее значение. Расчетная формула прочности принимает вид

$$\sigma_0 \left(1 + \frac{\nu_{\text{сл}}}{\cos \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{[\eta] \sigma_0}{E}}} \right) \leq [\sigma].$$

При соответствующем выборе величины случайного эксцентриситета $\nu_{\text{сл}}$ эта формула вполне эквивалентна условию (27).

Другой подход к решению задачи заключается в учете случайного эксцентриситета при любой величине напряжений изгиба $\sigma_{\text{и}}$. В этом случае в расчет вводится напряжение

$$\sigma'_{\text{и}} = \sigma_{\text{и}} + \sigma_0 \nu_{\text{сл}},$$

или в случае внецентренно сжатого стержня — эксцентриситет

$$\nu' = \nu + \nu_{\text{сл}}.$$

Расчет сжато-изогнутого стержня с учетом случайного эксцентриситета ведет к увеличению коэффициента запаса. Однако при больших эксцентриситетах влияние дополнительного слагаемого $\nu_{\text{сл}}$ несущественно. С другой стороны, стержни большей гибкости мало чувствительны к величине эксцентриситета. Поэтому учет случайного эксцентриситета сказывается более или менее значительно только лишь в случае малой гибкости и малых расчетных напряжений изгиба.

С принципиальной точки зрения учет случайных эксцентриситетов при расчете сжато-изогнутого стержня не может считаться обоснованным, хотя их наличие так же вероятно, как и в случае центрально сжатого стержня. Разница заключается в том, что для центрально сжатого стержня наличие случайного эксцентриситета принципиально изменяет характер работы стержня, в то время как для сжато-изогнутого стержня случайный эксцентриситет лишь увеличивает действующую на стержень нагрузку. Это случайное увеличение нагрузки на сжато-изогнутый стержень должно покрываться общим коэффициентом запаса, в то время как для центрально сжатого стержня влияние случайного эксцентриситета покрывается специальным коэффициентом запаса. Наличие случайного эксцентриситета того или иного знака одинаково возможно, поэтому вероятность неблагоприятного влияния $\nu_{\text{сл}}$ для сжато-изогнутого стержня вдвое меньше, чем для сжатого.

При анализе расчетных формул прочности сжато-изогнутого стержня не учитывает влияния случайного эксцентриситета К. С. Завриев¹, которому принадлежит приоритет строгого логического обоснования этой методики. Такого же мнения придерживаются Б. М. Броуде², Ф. Блейх³ и другие авторы.

¹ К. С. Завриев, Расчетные формулы прочности в особых случаях, ОНТИ, Главная редакция строительной литературы, 1935.

² Б. М. Броуде, О расчете сжато-изогнутых стержней, сборник Материалы проектной конторы, Стальконструкция, вып. 4, М 1939.

³ Ф. Блейх, Теория и расчет железных мостов (пер. с нем.), Гострансиздат, 1931.

Представителем иной точки зрения является В. Г. Писчиков¹, предлагающий при расчете сжато-изогнутого стержня принимать случайный эксцентриситет равным $\nu_{сл} = 0,002\lambda$. К. Ежек также считает необходимым учет случайных эксцентриситетов, но вводит в расчет лишь величину $\nu_{сл} = 0,01$.

Методы расчета сжато-изогнутого стержня по действующим нормам построены без учета влияния случайных эксцентриситетов. Многолетний опыт эксплуатации стальных конструкций не дает оснований считать недостаточной прочность сжато-изогну-

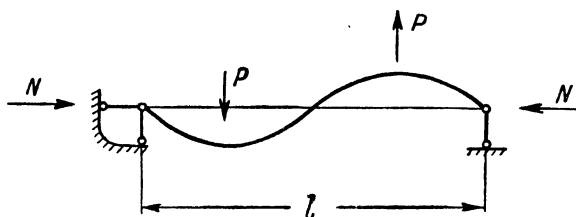


Рис. 57. Сжато-изогнутый стержень, антисимметричная деформация

тых стержней, спроектированных в соответствии с этой установкой.

Выше мы убедились, что формула (37) в случае центрального сжатия недостаточна. Другой случай недостаточности формулы (37) имеет место при антисимметричной относительно оси пролета поперечной нагрузке. Пусть, например, шарнирно-опертый стержень сжимается силой N и нагружен парой сил P , приложенных в четвертях пролета. Стержень деформируется так, что в середине пролета образуется точка перегиба (рис. 57). Наибольшее фибровое напряжение имеет место в четвертях пролета; для его определения можно воспользоваться формулой (37), причем в этом случае под гибкостью стержня следует понимать $\lambda = \frac{l}{2i}$.

Задача расчета сводится, таким образом, к проверке прочности сжато-изогнутого стержня половинной длины. Однако это не дает полной гарантии прочности, в чем легко убедиться, если учесть возможность деформации стержня по полуволне синусоиды, без точек перегиба. Эта деформация, вызванная случайным эксцентриситетом приложения сжимающей силы, накладывается на деформацию, вызванную поперечной нагрузкой. При возрастании сжимающей силы увеличиваются обе составляющие деформации. Однако деформация без точек перегиба возрастает быстрее и по мере приближения величины сжимающей силы N

¹ В. Г. Писчиков, Унификация методов расчета элементов на сжатие с изгибом, «Исследования по теории сооружений», вып. IV, Госстройиздат, 1949.

к эйлерову значению $N_s = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$ стремится к бесконечности.

Может случиться поэтому, что фибровое напряжение достигнет предела текучести сначала в середине пролета. Так как на величину напряжений в середине пролета поперечная нагрузка влияния не оказывает, то условие прочности имеет тот же вид, что и для центрально сжатого стержня:

$$\sigma = \frac{N}{F\varphi} \leq [\sigma],$$

причем при вычислении гибкости должна быть принята полная длина стержня. Таким образом, для расчета в данном случае приходится использовать две формулы (27) и (37), причем в каждую из них вводится различная гибкость.

Легко убедиться, что формула (37) сохраняет свою силу в случае, когда фибровое напряжение достигает предела текучести со стороны растянутого волокна. Напряжения σ_0 и σ_n имеют разные знаки, и условие прочности, вытекающее из формулы (37), принимает вид

$$\sigma = |\sigma_n| \psi(\lambda, [\eta] \sigma_0) - \sigma_0 \leq [\sigma],$$

где $|\sigma_n|$ — абсолютная величина наибольшего напряжения изгиба со стороны растянутого волокна. Здесь, как и повсюду, под σ_n понимается напряжение изгиба, подсчитанное без учета влияния сжимающей силы на величину изгибающего момента.

Практическое применение рассмотренной методики расчета сжато-изогнутого стального стержня несложно, однако желательно все же дальнейшее упрощение.

§ 33. ОСНОВНАЯ ФОРМУЛА РАСЧЕТА СЖАТО-ИЗОГНУТОГО СТЕРЖНЯ

Задача расчета сжато-изогнутого стержня может быть поставлена самым различным образом в зависимости от того, какие из величин (длина и поперечное сечение стержня, сжимающая сила и поперечная нагрузка на стержень) являются заданными и какие — искомыми.

Однако все разнообразные случаи могут быть решены путем пробных попыток, если только, полагая все относящиеся к стержню параметры известными, имеется возможность оценить прочность стержня. Задаваясь различными значениями неизвестной величины и оценивая каждый раз прочность стержня, можно в конце концов прийти к удовлетворительному решению, которое будет обладать достаточной для целей практики точностью.

Так как при расчете приходится по несколько раз пользоваться расчетной формулой, то очевидна желательность и даже практическая необходимость иметь возможно более простую формулу, обеспечивающую наименьшую трудоемкость расчета.

Это требование простоты расчетной методики является настолько важным, что допустимо в известных пределах поступиться точностью результата ради упрощения расчета. При наличии вспомогательных материалов (таблиц, графиков, номограмм) техника расчета даже в сложных случаях может быть существенно упрощена, но необходимость иметь всегда под рукой эти материалы значительно связывает проектировщика.

Полученные в предыдущем параграфе расчетные формулы включают трансцендентную функцию $\psi(\lambda, \sigma_0)$, непосредственное вычисление которой довольно трудоемко. Можно составить таблицу, в которой эта функция была бы дана в зависимости от значения аргументов λ и σ_0 . Однако, так как коэффициент ψ различен для каждого случая поперечной нагрузки, то понадобится не одна, а несколько таких таблиц.

Следует попытаться заменить функцию $\psi(\lambda, \sigma_0)$ некоторым приближенным выражением. В главе второй было найдено, что в случае шарнирно опертого стержня, нагруженного симметричной относительно середины пролета нагрузкой, коэффициент ψ может быть приближенно представлен в форме

$$\psi(\lambda, \sigma_0) = \frac{1 + \mu \frac{\sigma_0}{\sigma_3}}{1 + \frac{\sigma_0}{\sigma_3}}, \quad (40)$$

где σ_3 — эйлерово напряжение, а постоянная μ зависит от вида нагрузки, именно: при равномерно распределенной нагрузке $\mu = -0,18$; при сосредоточенной силе в середине пролета $\mu = +0,03$; при внецентренном сжатии $\mu = +0,23$.

Подставляя приближенное выражение для ψ в соотношении (36), получаем квадратное уравнение относительно коэффициента запаса η :

$$\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_3} - \mu \frac{\sigma_{II}}{\sigma_3} \right) \eta^2 - \left(1 + \frac{\sigma_{II}}{\sigma_0} + \frac{\sigma_T}{\sigma_3} \right) \eta + \frac{\sigma_T}{\sigma_0} = 0. \quad (41)$$

Это уравнение значительно проще исходного трансцендентного уравнения (36). Для оценки точности уравнения (41) вычислим коэффициент запаса для случая, рассмотренного в приведенном выше примере (см. предыдущий параграф). Эйлерово напряжение при $\lambda = 94$:

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 100 \cdot 000}{94^2} \approx 2 \cdot 350 \text{ кг/см}^2; \\ \frac{\sigma_0}{\sigma_3} - \mu \frac{\sigma_{II}}{\sigma_3} &= \frac{685}{2 \cdot 350} - 0,23 \frac{420}{2 \cdot 350} = 0,250; \\ 1 + \frac{\sigma_{II}}{\sigma_0} + \frac{\sigma_T}{\sigma_3} &= 1 + \frac{420}{685} + \frac{2 \cdot 400}{2 \cdot 350} = 2,634; \\ \frac{\sigma_T}{\sigma_0} &= \frac{2 \cdot 400}{685} = 3,50. \end{aligned}$$

Решая квадратное уравнение

$$0,250 \eta^2 - 2,634 \eta + 3,50 = 0,$$

находим с точностью до второго десятичного знака $\eta = 1,56$. Этот результат почти совпадает с данными точного решения по уравнению (37).

Весьма целесообразно ввести приближенное выражение (40) в формулу проверки напряжений (36). Имеем

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_{\text{н}} \frac{1 + \mu \frac{[\eta] \sigma_0}{\sigma_3}}{1 - \frac{[\eta] \sigma_0}{\sigma_3}} \leq [\sigma]. \quad (42)$$

Разумеется, формула эта применима лишь в случае, когда

$$[\eta] \sigma_0 < \sigma_3,$$

т. е., когда знаменатель коэффициента при $\sigma_{\text{н}}$ положителен. Это неравенство автоматически выполняется, если выдержано условие прочности при центральном сжатии (27). Соответствующим выбором коэффициента μ можно сделать формулу (42) пригодной для каждого случая нагрузки при любых закреплениях концов стержня. Значения коэффициента μ для наиболее важных случаев даны в табл. 13.

Заметим, что входящее в соотношения (40), (41) и (42) эйлерово напряжение $\sigma_3 = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ не следует рассматривать как реальное критическое напряжение. Нужно понимать эту величину как некоторую упругую постоянную, характеризующую сжатый или сжато-изогнутый стержень. Принимая во внимание, что

$$[\eta] = \frac{\sigma_{\text{т}}}{[\sigma]}; \quad \frac{\sigma_{\text{т}}}{\sigma_3} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{т}}} \right)^2,$$

где граничная гибкость $\lambda_{\text{т}} = \pi \sqrt{\frac{F}{\sigma_{\text{т}}}}$, можно представить формулу (42) в виде


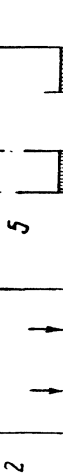


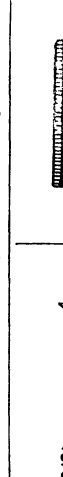
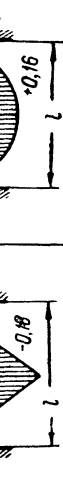
$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_{\text{н}} \frac{1 + \mu \frac{\lambda^2}{\lambda_{\text{т}}^2} \cdot \frac{\sigma_0}{[\sigma]}}{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_{\text{т}}^2} \cdot \frac{\sigma_0}{[\sigma]}} \leq [\sigma]. \quad (43)$$

Для сокращения записи обозначим

$$\gamma = \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{т}}} \right)^2 \frac{\sigma_0}{[\sigma]} = \frac{[\eta] \sigma_0}{\sigma_3}, \quad (44)$$

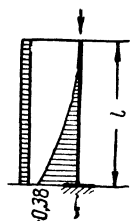
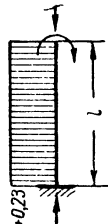
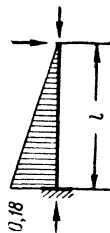
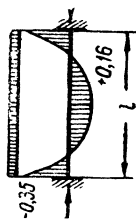
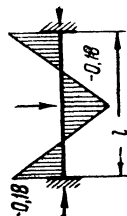
Таблица 13

Значения коэффициента μ для основных случаев нагрузок

Случай		Шарнирно опертый стержень										
		Значения коэффициента μ при $k =$										
		0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
1		-1,00	-0,84	-0,70	-0,58	-0,47	-0,38	-0,31	-0,25	-0,21	-0,19	-0,18
2		+0,23	+0,23	+0,22	+0,20	+0,17	+0,13	+0,08	+0,03	-0,03	-0,10	-0,18
3		+0,23	+0,22	+0,18	+0,12	+0,03	-0,08	-0,21	-0,37	-0,56	-0,77	-1,00
4		-1,00	-0,85	-0,71	-0,59	-0,49	-0,40	-0,33	-0,27	-0,21	-0,17	-0,14
5		+0,23	+0,23	+0,22	+0,21	+0,20	+0,18	+0,16	+0,13	+0,10	+0,06	+0,03
6		+0,03	+0,03	+0,02	+0,01	0,00	-0,02	-0,05	-0,07	-0,10	-0,14	-0,18

Зашемленный двумя концами стержень

Консольный стержень



тогда условие прочности (43) запишется в следующей форме¹:

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_n \frac{1+\mu\gamma}{1-\gamma} \leq [\sigma]. \quad (45)$$

При вычислении гибкости λ следует принимать во внимание свободную длину стержня l_0 :

$$\lambda = \frac{l_0}{i}; \quad l_0 = \beta l,$$

где коэффициент свободной длины β зависит от характера опорных креплений стержня.

Применение формулы (42) или ей эквивалентной (45) не требует каких-либо вспомогательных материалов. В то же время формула эта обладает достаточной для практических целей точностью. Поэтому формула (42) или (45) вполне может быть рекомендована в качестве основной при расчете сжато-изогнутого стержня. Она должна быть дополнена формулой (27), обслуживающей центрально сжатый стержень. Проверка по формуле (27), как было выше показано, может иногда оказаться решающей и в случае сжато-изогнутого стержня.

Формула (45) может быть представлена также в виде

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_n \psi \leq [\sigma],$$

где коэффициент ψ равен

$$\psi = \frac{1+\mu\gamma}{1-\gamma}. \quad (46)$$

Если принять для μ некоторое фиксированное значение, например, $\mu = +0,23$, то можно коэффициент ψ табулировать, представив его как функцию гибкости λ стержня и отношения $\frac{\sigma_n}{[\sigma]}$. Такие таблицы следует составить для каждого типа нагрузки в отдельности. Пренебрегая влиянием типа нагрузки, можно вести расчет по самому неблагоприятному случаю внецентренного сжатия, тогда достаточно будет только одной таблицы.

При малой гибкости стержня возможно пренебречь влиянием сжимающей силы на величину изгибающего момента и вести расчет по формуле сложного сопротивления

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_n \leq [\sigma]. \quad (47)$$

Погрешность этой формулы (идущая в ущерб прочности) при $\lambda = 40$ составляет 4%, при $\lambda = 60$ — 11%. Предполагается, что, кроме (47), удовлетворено также условие прочности (27).

¹ Сходная по структуре формула предложена Б. М. Броуде, см. упоминутую в предыдущем параграфе работу.

Формула (45) сохраняет свою силу и для случая растянуто-изогнутого стержня, если только величине σ_0 , а следовательно, и коэффициенту γ по формуле (44) приписать отрицательное значение.

§ 34. РАСЧЕТ СЖАТО-ИЗОГНУТОГО СТЕРЖНЯ ПО ДЕЙСТВУЮЩИМ НОРМАМ

Согласно действующим нормам проектирования стальных конструкций¹ расчет сжато-изогнутого стержня производится по формуле

$$\sigma = \frac{N}{F_\varphi} + \frac{M}{W} \leq [\sigma], \quad (48)$$

где коэффициент φ является функцией гибкости λ и имеет то же численное значение, что и в формуле (27).

Двучленная формула (48) носит название *формулы Ясинского*. Предложенная Ф. С. Ясинским 50 лет назад², формула эта является и сейчас надежной основой практического расчета сжато-изогнутого стержня.

Запишем формулу Ясинского в виде

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{\varphi} + \sigma_n \leq [\sigma] \quad (49)$$

и исследуем ее структурные особенности. По мере увеличения гибкости сжато-изогнутого стержня напряжение от изгиба $\sigma_n \varphi$ возрастает, в то время как напряжение от нормальной силы σ_0 остается неизменным. Формула же (48) построена так, что в ней напряжение от изгиба остается постоянным по мере роста гибкости, а увеличивается первый член, представляющий напряжение от продольной силы. Поэтому с точки зрения фактического соотношения между напряжениями от осевой силы и момента структура формулы Ясинского является произвольной. Достоинство формулы заключается в ее чрезвычайной простоте и в том, что в обоих крайних случаях $M=0$ (центрально-сжатие) и $N=0$ (изгиб) она автоматически принимает вид соответствующих данному случаю расчетных формул.

Исследуем точность формулы Ясинского. Пусть сечение сжато-изогнутого стержня подобрано по этой формуле так, что имеет место равенство

$$\frac{\sigma_0}{\varphi} + \sigma_n = [\sigma].$$

¹ Нормы и технические условия проектирования стальных конструкций (НитУ 1-46), Госстройиздат, 1946.

² Ф. С. Ясинский, Устойчивость деформаций и статика сооружений, 1903.

Найдем при помощи уравнения (41) коэффициент запаса для этого стержня. Имея в виду соотношение между допускаемым напряжением, нормативным коэффициентом запаса и пределом текучести $\sigma_T = [\sigma][\eta]$, находим

$$\sigma_H = \frac{\sigma_T}{[\eta]} - \frac{\sigma_0}{\varphi}.$$

Подставляя полученное значение σ_H в формулу (41) и обозначая для краткости

$$\alpha = \frac{\sigma_0}{[\sigma]}, \quad (50)$$

получаем квадратное уравнение

$$A \left(\frac{\eta}{[\eta]} \right)^2 + B \frac{\eta}{[\eta]} + C = 0, \quad (51)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\sigma_T}{\sigma_0} \left[\alpha \left(1 + \frac{\mu}{\varphi} \right) - \mu \right]; \\ B &= \left(1 - \frac{1}{\varphi} + \frac{\sigma_T}{\sigma_0} \right) + \frac{1}{\alpha}; \\ C &= \frac{1}{\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Коэффициенты квадратного уравнения зависят от гибкости стержня λ и от величины α . Поэтому погрешность формулы Ясинского, зависящая от отношения фактического коэффициента запаса к нормативному

$$x = \left(\frac{\eta}{[\eta]} - 1 \right) 100\%, \quad (53)$$

изменяется в функции от величин λ и α . Вычислим величину погрешности x , полагая $\lambda = 20, 40, \dots, 180$ и $\alpha = 0,2-0,4-0,6-0,8$. Результаты вычислений приведены в табл. 14. Значение μ принято равным $+0,23$, что соответствует наиболее неблагоприятному случаю внецентренного сжатия. Положительное значение погрешности указывает, что имеет место избыточный запас прочности:

$$\eta > [\eta],$$

т. е. фактический коэффициент запаса больше нормативного.

Крайние значения погрешности, как видно из табл. 14, равны -8% и $+11\%$.

Очевидно, что при других случаях поперечной нагрузки отрицательная погрешность будет меньше, так как мы вели расчет по самому неблагоприятному случаю внецентренного сжатия ($\mu = +0,23$).

Погрешность (в %) формулы Ясинского в функции
от гибкости λ и отношения $\alpha = \frac{\sigma_0}{[\sigma]}$ при $\mu = +0,23$

$\alpha \backslash \gamma$	0,2	0,4	0,6	0,8
20	0	0	+1	+3
40	-2	-2	0	+4
60	-5	-5	-2	+9
80	-7	-8	0	
100	-8	-5		
120	-6	+11		
140	-6			
160	-3			
180	+6			

Таким образом, формула Ясинского обеспечивает прочность сжато-изогнутого стержня с точностью до — 8%, причем указанная погрешность имеет место только лишь в наиболее неблагоприятном случае внецентренного сжатия при средних гибкостях и при небольшой величине осевых напряжений. Рассматривая формулу Ясинского с точки зрения экономичности подбора сечений, видим, что она дает некоторый избыточный запас прочности как раз в тех случаях, когда известная осторожность является вполне оправданной вследствие большого влияния случайных эксцентриситетов.

В качестве основного дефекта формулы Ясинского указывается обычно произвольность ее структуры и гораздо реже — недостаточность даваемого ею запаса прочности. Однако практика применения этой формулы показала полную ее жизнеспособность. Удовлетворительный результат, даваемый формулой Ясинского, не является следствием какой-то необъяснимой случайности и структура формулы имеет под собой некоторое обоснование. В самом деле, исходя из неравенства (42)

$$\sigma_0 + \sigma_n \frac{1 + \mu \frac{[\eta] \sigma_0}{\sigma_s}}{1 - \frac{[\eta] \sigma_0}{\sigma_s}} \leq [\sigma]$$

и избавляясь от знаменателя, находим

$$\sigma_0 \left(1 - \frac{[\eta] \sigma_0}{\sigma_s} \right) + \sigma_n \left(1 + \mu \frac{[\eta] \sigma_0}{\sigma_s} \right) \leq [\sigma] - \sigma_n \frac{\sigma_0}{\sigma_s}$$

или

$$\sigma_0 \left(1 + \frac{\sigma_n}{\sigma_s} - [\eta] \frac{\sigma_0}{\sigma_s} + \mu [\eta] \frac{\sigma_n}{\sigma_s} \right) + \sigma_n \leq [\sigma]. \quad (54)$$

Выражение в скобках зависит от гибкости λ , осевого напряжения σ_0 и лишь в малой степени от σ_n . Полагая выражение в скобках равным $\frac{1}{\varphi}$, приходим к формуле Ясинского.

Условность формулы Ясинского заключается в том, что величина φ принимается зависящей только от гибкости λ . Вообще говоря, значения коэффициента φ в формуле Ясинского и в формуле (27) можно было бы принять различными, однако единое значение коэффициента φ для расчета сжатого и сжато-изогнутого стержней представляет значительные практические удобства.

Формула Ясинского непригодна в тех случаях, когда прочность сжато-изогнутого стержня определяется достижением фибровыми напряжениями предела текучести со стороны растянутого волокна. В этом случае единственным обоснованным методом расчета является расчет по формуле (45).

Следует напомнить, что более точная формула (45) также не является вполне универсальной, как было установлено в предыдущем параграфе; она теряет свою пригодность по мере убывания напряжений изгиба. Обе рассматриваемые формулы — (45) и (49) — в известном смысле дополняют друг друга. Поэтому вполне обоснованным было бы введение в нормы проектирования стальных конструкций формулы (45) в качестве дополнения к формуле Ясинского (48).

Действующие нормы предписывают также дополнительную проверку прочности сжато-изогнутого стержня по формуле «сложного сопротивления»:

$$\sigma = \frac{N}{F_{нт}} + \frac{M}{W_{нт}} \leq [\sigma], \quad (55)$$

которая не учитывает влияния сжимающей силы на величину изгибающего момента, но зато учитывает ослабление поперечного сечения стержня заклепочными или иными отверстиями. Заметим, что в интересах осторожности правильно было бы учитывать ослабление и при расчете по формуле Ясинского, если только это ослабление имеет место в сечении с наибольшим изгибающим моментом. В этом случае проверка по формуле (55) являлась бы излишней.

§ 35. ДРУГИЕ ФОРМУЛЫ РАСЧЕТА СЖАТО-ИЗОГНУТОГО СТЕРЖНЯ

Все рассмотренные выше формулы расчета сжато-изогнутого стержня являются двучленными. В этих формулах один член представляет собой напряжение сжатия, другой член — напряжение изгиба. Возможно, однако, такое преобразование условия прочности, при котором задача формально сводится к проверке напряжений в случае изгиба или же в случае централь-

ного сжатия; получающаяся при этом расчетная формула имеет одночленную структуру.

Назовем *ядровым моментом* изгибающий момент в сечении стержня, подсчитанный относительно края ядра сечения:

$$M_{\text{я}} = M + Nk; \quad (56)$$

тогда расчетная формула прочности сжато-изогнутого стержня может быть приведена к виду

$$\sigma = \frac{M_{\text{я}}}{W} \leq [\sigma]. \quad (57)$$

Входящая в формулу (56) величина M определяется с учетом влияния сжимающей силы:

$$M = \mathbf{M} \psi(\lambda, [\gamma] \sigma_0), \quad (58)$$

причем значение коэффициента ψ можно вычислять по приближенной формуле

$$\psi = \frac{1 + \mu\gamma}{1 - \gamma}. \quad (59)$$

Несмотря на простой внешний вид одночленной формулы (57), она никаких преимуществ по сравнению с формулами (42) или (45) не имеет. Применяя формулу (57), приходится по существу производить те же операции, что и при расчете по двучленной формуле.

Расчет сжато-изогнутого стержня можно производить также по одночленной формуле вида

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{\varphi_{\text{вн}}} \leq [\sigma]. \quad (60)$$

В этой формуле $\varphi_{\text{вн}}$ — коэффициент, зависящий от гибкости стержня, от соотношения между величиной напряжений изгиба $\sigma_{\text{и}}$ и сжатия σ_0 , а также и от типа поперечной нагрузки на стержень.

Формула (60) предложена К. С. Завриевым, который составил также таблицы значений $\varphi_{\text{вн}}$ для наиболее часто встречающихся случаев нагрузки¹. В таблицах Завриева коэффициент $\varphi_{\text{вн}}$ дается как функция параметров:

$$\alpha = \frac{E}{\lambda^2 \sigma_{\text{г}}} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{\sigma_{\text{и}}}{[\sigma]}.$$

Если в условии прочности (43) положить $\sigma = [\sigma]$ и $\sigma_0 = \varphi_{\text{вн}} [\sigma]$, то получим квадратное уравнение

$$\varphi_{\text{вн}}^2 - \left(1 + \frac{\lambda_{\text{т}}^2}{\lambda^2} + \mu \frac{\sigma_{\text{и}}}{[\sigma]}\right) \varphi_{\text{вн}} + \frac{\lambda_{\text{т}}^2}{\lambda^2} \left(1 - \frac{\sigma_{\text{и}}}{[\sigma]}\right) = 0, \quad (61)$$

¹ К. С. Завриев, Расчетные формулы прочности в особых случаях, ОНТИ, Главная редакция строительной литературы, 1935.

из которого величина $\varphi_{\text{вн}}$ находится как функция отношений $\frac{\lambda}{\lambda_T}$ и $\frac{\sigma_{\text{н}}}{[\sigma]}$.

Коэффициент μ учитывает влияние типа поперечной нагрузки. Поэтому для каждого типа поперечной нагрузки должна быть составлена особая таблица значений коэффициента $\varphi_{\text{вн}}$.

Нормы и технические условия проектирования стальных конструкций (НТУ 1-46) допускают при расчете сжато-изогнутого стержня наряду с формулой Ясинского (48) применение одночленной формулы вида (60). Значения коэффициента $\varphi_{\text{вн}}$ задаются нормами как функция гибкости стержня λ и «относительного эксцентриситета»:

$$m = \frac{\sigma_{\text{н}}}{\sigma_0} = \frac{M}{Nk}. \quad (62)$$

Параметр m имеет тот же смысл, что и относительный эксцентриситет ν в рассмотренных выше случаях внецентренного сжатия.

Основываясь на условии прочности (43) и полагая $\sigma = [\sigma]$, $\sigma_{\text{н}} = m \sigma_0$, получаем квадратное уравнение

$$\varphi_{\text{вн}}^2 (m\mu - 1) \frac{\lambda^2}{\lambda_T^2} + \varphi_{\text{вн}} \left(1 + m + \frac{\lambda^2}{\lambda_T^2} \right) - 1 = 0, \quad (63)$$

из которого величина $\varphi_{\text{вн}}$ может быть найдена как функция гибкости λ и относительного эксцентриситета m . Таким путем можно составить таблицу $\varphi_{\text{вн}}$ для данного фиксированного значения μ , аналогичную нормативной таблице. Отметим значительное практическое неудобство таких таблиц «с двумя входами», заключающееся в сложности интерполяции.

При больших значениях относительного эксцентриситета $m > 20$ формула (60) становится непригодной. Она непригодна также в тех случаях, когда прочность стержня определяется напряжением растянутого от изгиба волокна.

В силу изложенного выше можно сделать вывод, что допускаемая Н и ТУ 1-46 одночленная формула расчета сжато-изогнутого стержня не имеет преимуществ по сравнению с формулой Ясинского.

Рассмотрим еще некоторые другие формулы расчета сжато-изогнутого стержня. Американские мостовые нормы¹ дают для определения величины допускаемого осевого напряжения *формулу секанса*

¹ Specifications for Steel Railway Bridges, „American Railway Engineering Association“, 1943.

$$\sigma_{\text{доп}} = \frac{\frac{\sigma_r}{[\eta]}}{1 + (m + 0,25) \sec \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{\sigma_{\text{доп}} [\eta]}{E}}} . \quad (64)$$

Здесь m — относительный эксцентриситет по формуле (62); все прочие обозначения понятны без пояснений.

При вычислении гибкости предписывается принимать

$$\lambda = \frac{0,875 l}{i} ,$$

где коэффициент 0,875 учитывает, вероятно, частичное защемление концов стержня.

Особенностью формулы (64) является учет случайного эксцентриситета довольно значительной величины. В запас прочности идет также то обстоятельство, что при любом типе поперечной нагрузки расчет ведется по формуле внецентренного сжатия. Действительно, формула (64) легко может быть получена из формулы (12).

Разумеется, формула (67) чрезвычайно неудобна для практического пользования, так как представляет собой трансцендентное уравнение относительно искомой величины $\sigma_{\text{доп}}$. Решение этого уравнения без помощи специальной таблицы довольно трудоемко и требует сравнительно большой затраты времени.

Предложенная Н. В. Погоржельским¹ формула расчета сжатого-изогнутого стержня

$$\frac{M}{W} + \frac{N}{F} + [\sigma] \frac{N}{N_s} \leq [\sigma] \quad (65)$$

вызвала в свое время оживленную дискуссию. Надо указать, что формула Погоржельского представляет собой частный случай формулы Ясинского. В самом деле, полагая в формуле (65)

$$\varphi_n = \frac{1}{1 + \frac{[\sigma]}{\sigma_s}} ,$$

приходим к двучленной формуле вида (48). Коэффициент Погоржельского φ_n для данной марки стали зависит только от гибкости стержня λ . Сравнение с нормативными значениями коэффициента φ показывает, что при $\lambda < 110$ коэффициент Погоржельского $\varphi_n < \varphi$; при $\lambda > 120$, наоборот, $\varphi_n > \varphi$. Формула Погоржельского ведет к излишнему расходу материала в практически важном диапазоне $\lambda < 110$. При $\lambda > 110$ эта формула не обеспечивает необходимой прочности.

¹ Методике Погоржельского посвящен вып. 48 трудов МИИТ «К вопросу о расчете сжатых стержней», Транжелдориздат, 1935.

§ 36. ГИБКОСТЬ СТЕРЖНЯ. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Рассмотренные в предыдущих параграфах настоящей главы практические методы расчета сжатого и сжато-изогнутого стержня опираются на понятие гибкости стержня. Для шарнирно опертого стержня гибкость равна отношению его длины к радиусу инерции поперечного сечения. Если же имеют место другие условия закрепления концов стержня, то при вычислении гибкости

$$\lambda = \frac{l_0}{i} \quad (66)$$

принимается не фактическая длина стержня l , а некоторая, так называемая *свободная* (или расчетная) длина стержня l_0 . Осветим смысл этого понятия с точки зрения основных предпосылок практического расчета сжатого и сжато-изогнутого стержня, изложенных в настоящей главе.

Эйлерова критическая сила для стержня при любом характере опорных закреплений равна

$$N_9 = \frac{\pi^2 EJ}{l_0^2}, \quad (67)$$

отсюда свободная длина

$$l_0 = \pi \sqrt{\frac{EJ}{N_9}}. \quad (68)$$

Методика расчета стальных конструкций основана на условной предпосылке о применимости закона Гука вплоть до предела текучести. Выбирая в качестве предельного состояния опасное состояние, при котором фибровые напряжения в наиболее напряженной точке достигают предела текучести, мы ограничиваем работу сжато-изогнутого стержня упругой областью. Входящая в расчетные формулы сжатого и сжато-изогнутого стержня эйлерова сила N_9 (или эйлерово напряжение σ_9) должна вычисляться в предположении абсолютно упругой работы материала. Эту эйлерову силу, что уже неоднократно подчеркивалось, следует рассматривать не как реальную критическую силу, а как некоторую постоянную. В этом смысле можно считать целесообразным введение термина *модуль устойчивости* для эйлерова напряжения (25)

$$\sigma_9 = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

Модуль устойчивости есть, таким образом, упругая постоянная стержня, характеризующая его гибкость.

Из высказанных выше соображений следует, что вычисление свободной длины стержня должно производиться без всяких поправок на пластические свойства стали. Встречающееся

иногда представление о необходимости учета пластических свойств материала при определении свободной длины (путем введения обобщенного модуля $E\epsilon$ или другим способом) является ошибочным.

Очень важно то обстоятельство, что свободная длина не зависит от наличия поперечной нагрузки на стержень. Свободная длина стержня при некоторых определенных условиях опорных закреплений будет одной и той же независимо от того, является ли стержень центрально сжатым или же сжато-изогнутым при любом типе поперечной нагрузки.

Если речь идет об определении свободной длины стержня, входящего в состав плоской системы стержней, то в этом случае приходится принимать во внимание не только условия сопряжения между стержнями системы, но также и величину продольных сил в других стержнях системы. Методы исследования устойчивости плоских стержневых систем излагаются в главе седьмой.

Все результаты, полученные нами в первых пяти главах, основаны на приближенном дифференциальном уравнении изгиба, которое является линейным. Это обстоятельство существенно облегчает аналитическое исследование задачи.

Возникает естественный вопрос, в какой мере искусственно навязанная задаче линейность влияет на полученные результаты. При этом достоверность полученных на основе линейной трактовки задачи результатов должна быть оценена как с качественной, так и с количественной точки зрения. В главе шестой рассматриваются простейшие нелинейные задачи устойчивости сжатого и сжато-изогнутого стержня, классифицируются разновидности явления потери устойчивости и оценивается точность результатов, полученных на основе линейной трактовки задачи.

КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ СЖАТОГО И СЖАТО-ИЗОГНУТОГО СТЕРЖНЯ

§ 37. НЕЛИНЕЙНАЯ ТРАКТОВКА ЗАДАЧИ. МОДЕЛЬ УПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

До сих пор (в первых пяти главах) при исследовании работы сжатого и сжато-изогнутого стержня мы исходили из технической теории изгиба балок. Эта теория основана на дифференциальном уравнении изгиба, в котором принято известное приближенное выражение для кривизны стержня. Точное выражение для кривизны имеет вид

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (1)$$

Если предполагать, что деформации стержня малы по сравнению с его длиной, то производная $\frac{dy}{dx}$ является величиной малой по сравнению с единицей. Пренебрегая квадратом этой производной по сравнению с единицей, получаем приближенное выражение для кривизны.

Решение, основанное на точном выражении для кривизны, дает возможность определить конечные деформации стержня, соизмеримые с его длиной. Такое решение имеет большое практическое значение для гибкого стержня, деформации которого не являются малыми и потому не могут быть с достаточной степенью точности найдены при помощи приближенного решения.

Аналитическое исследование конечных деформаций сжатого и сжато-изогнутого стержня позволяет внести количественные коррективы в полученные на основе линейной трактовки задачи результаты. Не менее важна также и качественная сторона вопроса. Элементарная линейная трактовка задачи схематизирует физическую сущность явления. Поэтому мы должны исследовать принципиальные особенности и физический смысл явлений, связанных с работой сжатого и сжато-изогнутого стержня, основываясь на более точных нелинейных соотношениях. Ре-

зультаты такого исследования дадут возможность оценить достоверность физической картины, полученной на основе линейной трактовки задачи.

Как будет ниже показано, решение, основанное на дифференциальных уравнениях технической теории изгиба балок, дает вполне достаточную точность при определении величины критической нагрузки во всех без исключения практически важных случаях; однако более точное исследование на основе зависимости (1) дает возможность установить интересные особенности поведения стержня в упругой и упруго-пластической области при нагрузках, близких к критическим. Изучение этих особенностей является необходимым этапом при изучении проблемы механизма потери устойчивости.

Исследование малых деформаций сжатого и сжато-изогнутого стержня начиналось с рассмотрения модели (главы первая и вторая). Покажем теперь, что та же самая модель может служить для изучения особенностей работы сжатого и сжато-изогнутого стержня и при конечных деформациях.

Представим себе бесконечно-жесткий прямой стержень длиной l с шарнирно закрепленным нижним концом. Верхний конец стержня поддерживается пружиной. Будем рассматривать конечные отклонения стержня от первоначального вертикального положения. Система имеет одну степень свободы, отклоненное состояние стержня характеризуется одной координатой — углом вращения φ (рис. 58). При этом верхний конец стержня будет перемещаться по дуге окружности радиуса l , увлекая за собой и растягивая пружину. Предположим, что пружина деформируется, располагаясь на дуге окружности (это может быть достигнуто устройством направляющего кольца). Упругая реакция пружины на стержень будет направлена по касательной к окружности. Величина реакции пропорциональна удлинению пружины

$$H = \gamma l \varphi, \quad (2)$$

где γ — коэффициент упругости пружины.

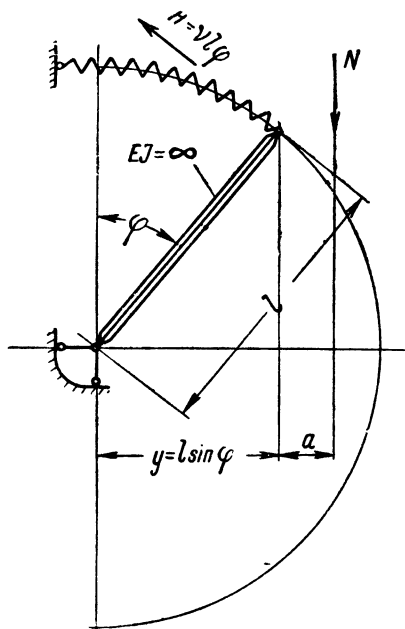


Рис. 58. Модель упругой устойчивости (нелинейная трактовка)

Стержень нагружен сжимающей силой N , которая приложена к верхнему концу стержня с эксцентриситетом

$$a = \alpha l. \quad (3)$$

Условие равновесия стержня в некотором отклоненном положении имеет вид

$$N(l \sin \varphi + a) - Hl = 0,$$

откуда, принимая во внимание (2), получаем

$$N = \sqrt{l} \frac{\varphi}{\sin \varphi + \alpha}. \quad (4)$$

В качестве меры отклоненного состояния стержня от начального вертикального положения примем отклонение (прогиб) y , представляющее собой проекцию длины стержня на горизонтальную ось:

$$y = l \sin \varphi. \quad (5)$$

Анализ полученных простых зависимостей начнем с рассмотрения случая центрального сжатия, когда сила N приложена без эксцентриситета. Положим $\alpha = 0$, тогда соотношение (4) примет вид

$$N = \sqrt{l} \frac{\varphi}{\sin \varphi}. \quad (6)$$

Это условие равновесия при любом значении силы N удовлетворяется, если $\varphi = 0$. Отсюда следует, что состояние вертикального равновесия всегда возможно. Легко видеть, что при $N < \sqrt{l}$ уравнение (6) никаких других действительных корней иметь не может. В случае $N > \sqrt{l}$ уравнение (6), помимо $\varphi = 0$, имеет еще один корень φ_1 в интервале $0 < \varphi_1 < \pi$. Отсюда следует, что при $N > \sqrt{l}$ возможны два равновесных состояния стержня, соответствующих одному и тому же значению сжимающей силы N . Первое равновесное состояние при вертикальном положении стержня неустойчиво. Достаточно вывести стержень из этого равновесного состояния, чтобы он начал все более от него отклоняться до тех пор, пока не придет к второму равновесному состоянию. Второе равновесное состояние устойчиво: стержень, отклоненный от этого равновесного состояния, возвратится к нему, как только будет устранена причина, вызвавшая отклонение.

Для доказательства этих положений следует сравнить величину отклоняющего момента $M_1 = Nl \sin \varphi$ с величиной удерживающего момента $M_2 = \sqrt{l}^2 \varphi$. В интервале $0 < \varphi < \varphi_1$ отклоняющий момент больше удерживающего

$$M_1 > M_2.$$

Стержень стремится ко второму равновесному состоянию, определяемому углом φ_1 . При $\varphi > \varphi_1$ удерживающий момент больше отклоняющего:

$$M_2 > M_1.$$

Стержень опять стремится ко второму равновесному состоянию, на этот раз путем уменьшения угла отклонения.

Значение сжимающей силы

$$N_k = \nu l \quad (7)$$

является критическим. При $N > N_k$ вертикальное равновесное состояние стержня, как мы видели, неустойчиво.

Для каждого значения $N > N_k$ из уравнения (6) может быть найдено значение угла $\varphi_1 > 0$, соответствующее второму равновесному состоянию. Величина отклонения (прогиба) определяется по формуле (5).

Зависимость между сжимающей силой N и отклонением y графически представлена на рис. 59. Точки, расположенные на оси ординат ON , соответствуют вертикальному равновесному состоянию $y = 0$. Это равновесное состояние является единственным возможным при $N < N_k$. В точке $N = N_k$ от оси ординат ответвляется кривая, соответствующая второму равновесному состоянию $y > 0$.

По мере роста сжимающей силы в интервале $N_k < N < \frac{\pi}{2} N_k$ отклонение y увеличивается. Это отклонение достигает максимального значения $y = l$ при $N = \frac{\pi}{2} N_k$, что соответствует углу вращения стержня $\varphi = \frac{\pi}{2}$. При $N > \frac{\pi}{2} N_k$ угол $\varphi > \frac{\pi}{2}$, сила N становится растягивающей, отклонение уменьшается. В пределе, при неограниченном увеличении сжимающей силы N , отклонение y стремится к нулю. Совершив поворот на угол π , стержень снова принимает вертикальное положение.

Полученные результаты должны быть сравнены с результатами, найденными в главе первой, § 1, при анализе этой же системы на основе элементарной линейной трактовки. Прежде всего видим, что линейная трактовка задачи приводит к правильному значению критической силы. И элементарное, и точное решение дают одинаковую качественную оценку вертикальному равновесному состоянию, которое при $N < N_k$ является устойчивым, но неустойчиво при $N > N_k$.

Критическое состояние $N = N_k$ согласно линейной трактовке задачи характеризуется безразличным равновесием системы, при котором возможно произвольное отклонение y . Точное решение задачи показывает, что эта неопределенность величины отклонения не имеет места. Значению $N = N_k$ соответствует единственное равновесное состояние $y = 0$. Из графика (рис. 59)

можно видеть, что точка $y=0$, $N=N_k$ — двойная точка: она соответствует двум бесконечно близким равновесным состояниям. Мы можем считать, что в этой двойной точке имеет место мгновенное состояние безразличного равновесия.

Нелинейная трактовка задачи показывает, что при значениях сжимающей силы, превышающих критическое, возможны равновесные состояния, отличные от состояния вертикального равновесия.

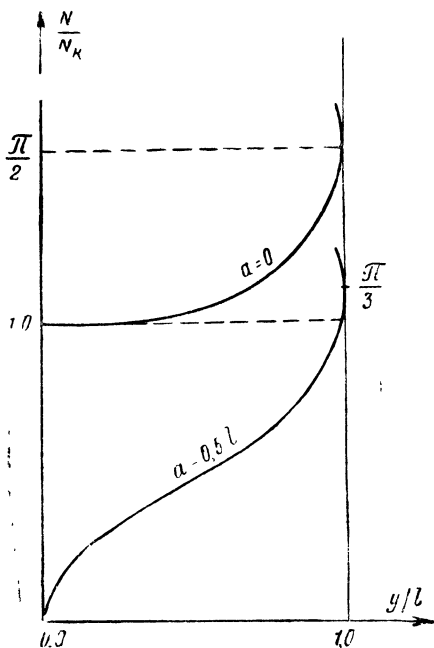


Рис. 59. График зависимости между силой N и отклонением y (модель)

Нелинейная трактовка задачи показывает, что при значениях сжимающей силы, превышающих критическое, возможны равновесные состояния, отличные от состояния вертикального равновесия. Одному и тому же значению сжимающей силы соответствуют два равновесных состояния, из которых одно ($y=0$) является неустойчивым, а второе ($y>0$) — устойчивым.

Это явление *разветвления* (бифуркации) форм равновесия характерно для нелинейных задач устойчивости. Линейная трактовка приводит к выводу, что при $N>N_k$ устойчивое равновесие невозможно. Точное решение показывает, что при $N>N_k$ возможно отклоненное устойчивое равновесное состояние и позволяет вычислить величину отклонения в этом случае.

Произведенный анализ дает возможность высказать следующие суждения относительно достоверности результатов, получаемых на

основе линейной трактовки задачи. Линейная трактовка задачи:

- 1) позволяет найти точное значение критической силы;
- 2) описывает явление потери устойчивости упрощенно и схематически;
- 3) не дает возможности найти отклоненные равновесные состояния системы при значениях сжимающей силы, превышающих критическое значение.

Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда сила N приложена с эксцентриситетом. Представим условие равновесия (4) в виде

$$N = N_k \frac{\varphi}{\sin \varphi + \alpha}. \quad (8)$$

Анализ этого уравнения показывает, что каждому значению

силы N в интервале $0 < N < \frac{\pi}{\alpha} N_k$ соответствует при $\alpha \neq 0$ одно единственное значение угла φ в интервале $0 < \varphi < \pi$. Таким образом, отклоненное состояние равновесия стержня при данном значении силы N является строго определенным. Зависимость между величиной силы N и отклонением y графически изображается кривой линией. Такая линия при $\alpha = 0,5$ дана на рис. 59. При возрастании сжимающей силы N от нуля до значения $\frac{\pi}{2(1+\alpha)} N_k$ прогиб монотонно увеличивается и достигает максимального значения $y = l$. Угол вращения при этом равен $\frac{\pi}{2}$. Дальнейшее увеличение силы N увеличивает угол

вращения, сила становится растягивающей, прогиб уменьшается.

Сравнение полученных результатов с данными элементарного решения, приведенного в главе второй (§ 11), показывает существенное различие при значениях силы N , близких к критическому значению N_k или же превышающих это значение.

Линейная трактовка задачи приводит к выводу, что по мере увеличения силы N до значения N_k отклонение неограниченно возрастает, так что в пределе при $N = N_k$ отклонение становится равным бесконечности. При $N > N_k$ равновесие невозможно.

Точное решение задачи показывает, что неограниченное возрастание прогибов является математической фикцией, которая присуща только линейной трактовке задачи. На самом же деле значению $N = N_k$ соответствуют вполне определенный угол вращения $\varphi < \frac{\pi}{2}$, который находится из уравнения $\varphi - \sin \varphi = \alpha$,

и вполне определенное и конечное отклонение $y < l$. Равновесное состояние возможно также и при значениях силы N , превышающих критическое.

Как ниже будет установлено, все принципиальные закономерности работы сжатого и сжато-изогнутого упругого стержня при конечных деформациях полностью аналогичны соответствующим закономерностям рассмотренной здесь модели.

§ 38. УПРУГАЯ РАБОТА ЦЕНТРАЛЬНО И ВНЕЦЕНТРЕННО СЖАТОГО СТЕРЖНЯ

Исследование конечных деформаций начнем с изучения работы упругого внецентренно сжатого стержня.

Рассмотрим внецентренно сжатый шарнирно опертый стержень (рис. 60). Пусть x — абсцисса изогнутой оси, отсчитываемая от середины длины стержня; y — соответствующая ордината; N — сжимающая сила, приложенная с эксцентриситетом a ; l — длина стержня.

Дифференциальное уравнение изгиба

$$\frac{1}{\rho} + M = 0 \quad (9)$$

после подстановки выражений для кривизны (1) и для изгибающего момента $M = N(a + y)$ принимает вид

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{N}{EJ}(a + y) = 0. \quad (10)$$

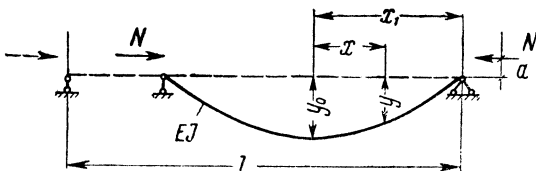


Рис. 60. Внецентренно сжатый шарнирно опертый стержень

Решение этого уравнения выражается при помощи эллиптических интегралов. Опуская выкладки, дадим окончательные результаты.

Для центрально сжатого стержня ($a = 0$) при $N \leq N_*$ единственно возможной формой равновесия является прямолинейная форма. При $N > N_*$, помимо прямолинейной формы равновесия, возможна еще криволинейная форма. Криволинейная форма равновесия устойчива, прямолинейная форма при $N > N_*$ неустойчива.

Здесь эйлерова критическая сила

$$N_* = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$

Некоторые из форм упругой кривой, соответствующие разным значениям сжимающей силы, показаны на чертеже (рис. 61).

Как мы видим, каждому значению сжимающей силы $N > N_*$ соответствует своя строго определенная форма кривой. Деформации сжатого стержня конечны, но весьма велики. Так, например, прогиб в середине пролета составляет приблизительно $1/5$ пролета, в то время как сжимающая сила превышает эйлерову силу всего лишь на 6%.

Помимо кривой без точек перегиба, можно найти еще бесчисленное множество кривых с одной, двумя, тремя и так далее точками перегиба, соответствующих так называемым высшим значениям критической силы:

$$N = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{l^2} \quad (n = 2, 3, 4, \dots).$$

Зависимость между величиной сжимающей силы N и проги-

бом в середине пролета y_0 наглядно иллюстрируется графиком (рис. 62). По оси абсцисс отложены значения $\frac{y_0}{l}$, а по оси ординат — отношения $\frac{N}{N_3}$. При $\frac{N}{N_3} \leq 1$ возможна только

прямолинейная форма равновесия, следовательно, кривая идет от начала координат по оси ординат до точки $(0,1)$. В этой точке она испытывает резкий излом под прямым углом. Прогибы чрезвычайно быстро возрастают при почти постоянном значении сжимающей силы. При $N=N_3$ равна нулю производная

$$\frac{dN}{dy_0} = 0. \quad (11)$$

При дальнейшем возрастании сжимающей силы происходит медленное убывание прогибов. Для кривой $N(y_0)$ характерно на этом участке изменение знака кривизны, что указывает на наличие точки перегиба. В этой точке равна нулю вторая производная

$$\frac{d^2N}{dy_0^2} = 0.$$

При весьма больших значениях N кривая асимптотически приближается к оси ординат.

Принципиальной особенностью работы упругого центрально сжатого стержня является разветвление форм равновесия при значении сжимающей силы $N > N_3$.

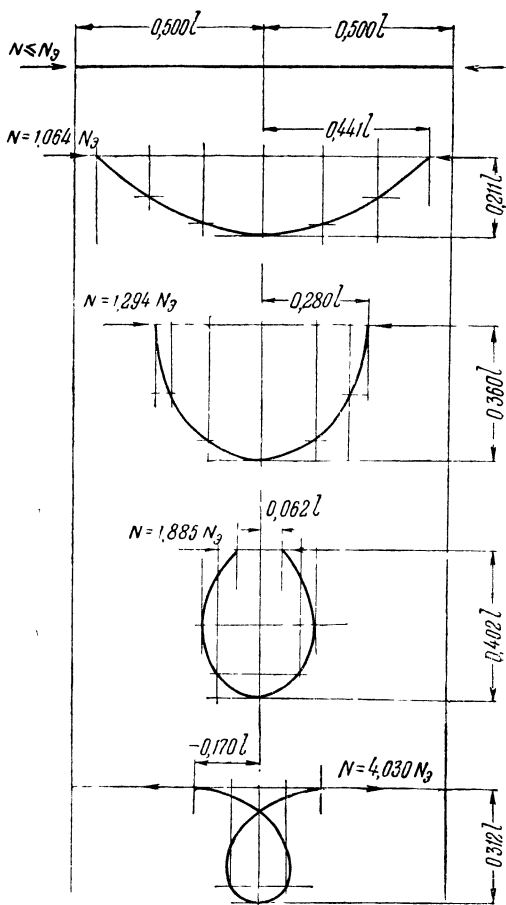


Рис. 61. Последовательные формы упругой кривой (шарнирно опертый стержень)

При $N > N_3$ эта прямолинейная форма неустойчива, устойчива криволинейная форма. Направление изгиба стержня в плоскости (знак прогиба) остается при этом неопределенным.

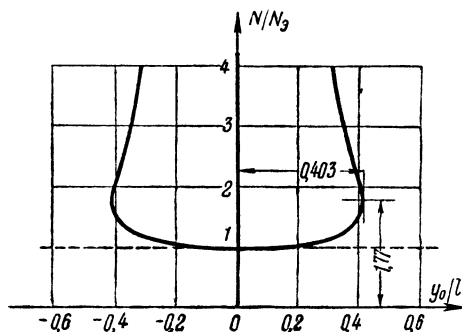


Рис. 62. График зависимости между прогибом и сжимающей силой для центрально сжатого упругого стержня (треугольник бифуркации)

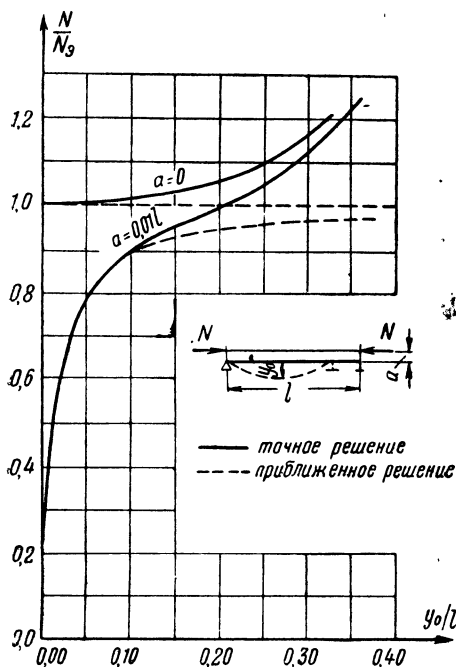


Рис. 63. График зависимости между прогибом и сжимающей силой для внецентренно сжатого упругого стержня

Поэтому каждому значению $N > N_3$ соответствуют три равновесных состояния: одно прямолинейное (неустойчивое) и два криволинейных (устойчивых).

Характерное очертание графика (рис. 62) позволяет присвоить ему наименование *треугольник бифуркации*.

Зависимость между прогибом и величиной сжимающей силы для внецентренно сжатого стержня дана на рис. 63. Экцентриситет принят $a = 0,01l$. С целью сравнения дана также кривая для случая центрального сжатия ($a = 0$).

Кривая, соответствующая элементарному линейному решению, дана на графике пунктиром. Согласно элементарному решению по мере приближения сжимающей силы к эйлерову значению прогиб неограниченно возрастает. Этот результат не подтверждается точным решением, согласно которому прогиб при $N \geq N_3$ остается конечным и вполне определенным по величине.

Мы рассматриваем здесь только такие равновесные состояния внецентренно сжатого стержня, которые возникают при плавном развитии деформации в процессе

естественного возрастания сжимающей силы. При величине сжимающей силы, превышающей эйлерово значение, существуют также и другие равновесные состояния, которые могут возникнуть из первоначального только путем перескока.

§ 39. УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКАЯ РАБОТА ЦЕНТРАЛЬНО И ВНЕЦЕНТРЕННО СЖАТОГО СТЕРЖНЯ

Рост деформаций сопровождается увеличением напряжений, и стержень вступает в стадию упруго-пластической работы. Если принять гипотезу упруго-пластического материала, то для стержня прямоугольного поперечного сечения оказывается возможным проинтегрировать точное дифференциальное уравнение изгиба (1). Благодаря этому удается установить принципиальные особенности упруго - пластической работы центрально и внецентренно сжатого стержня¹.

График зависимости между осевым напряжением

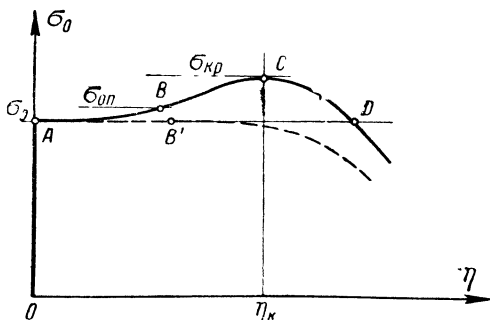


Рис. 64. Схематический график $\sigma_0(\eta)$ для центрально сжатого стержня

$$\sigma_0 = \frac{N}{F} \quad (12)$$

(F — площадь поперечного сечения стержня) и относительным прогибом

$$\eta = \frac{y_0}{k} \quad (13)$$

(k — ядровое расстояние) для случая центрального сжатия представлен на рис. 64.

Исследуем характерные особенности этого графика. Мы предполагаем, что эйлеровы напряжения меньше предела текучести $\sigma_e < \sigma_T$. Для этого гибкость стержня λ должна быть больше граничной гибкости λ_T .

Отрезок OA оси ординат соответствует упругой работе стержня при осевом напряжении, меньшем эйлерова значения:

$$\sigma_0 < \sigma_e.$$

¹ С. Д. Лейтес, К вопросу о механизме потери устойчивости, «Инженерный сборник», т. VII, изд. Академии наук СССР, 1950.

Стержень сохраняет свою прямолинейную форму

$$\eta = 0.$$

После того как осевое напряжение превысит эйлерово значение

$$\sigma_0 > \sigma_s,$$

наряду с прямолинейной формой равновесия становится возможной криволинейная форма. Фибровые напряжения с внутренней стороны стержня вследствие изгиба быстро возрастают и в точке B графика достигают предела текучести. Наступает опасное состояние, представляющее собой верхнюю границу упругой работы стержня. Соответствующее осевое напряжение будет равно $\sigma_{оп}$. Итак, отрезок AB графика характеризует упругую работу стержня при осевом напряжении, заключенном в пределах $\sigma_s < \sigma_0 < \sigma_{оп}$.

Начиная от точки B , стержень вступает в упруго-пластическую стадию работы. График $\sigma_0(\eta)$ изменяет свое очертание по сравнению с графиком для абсолютно упругого стержня. Возрастание деформаций сопровождается сначала увеличением осевого напряжения, а затем, после достижения в точке C максимума, осевое напряжение начинает убывать. В точке D кривая пересекает параллельную оси абсцисс прямую $\sigma_0 = \sigma_s$.

Точка C характеризуется наивысшим для данной гибкости осевым напряжением, которое является в соответствии с установленными в главе третьей понятиями *критическим* напряжением. В этой точке имеет место условие экстремума

$$\frac{d\sigma_0}{d\eta} = 0, \quad (14)$$

т. е. касательная к кривой графика в этой точке параллельна оси абсцисс.

Между точками B и C кривая графика меняет знак кривизны, т. е. имеет место точка перегиба, для которой выполняется условие

$$\frac{d^2\sigma_0}{d\eta^2} = 0. \quad (15)$$

Итак, мы видим, что центрально сжатый стержень дважды теряет устойчивость: первый раз при $\sigma_k = \sigma_s$ в упругой области и второй раз при $\sigma_k > \sigma_s$ в упруго-пластической области.

Рассмотрим работу внецентренно сжатого стержня. Изгиб здесь имеет место с самого начала. Возможны два разных случая. В первом случае опасное состояние наступает ранее, чем осевое напряжение достигнет эйлерова значения

$$\sigma_{оп} < \sigma_s.$$

График $\sigma_0(\eta)$ в этом случае имеет то же очертание, что и график, полученный путем элементарного решения. Точное ре-

шение дает несколько более высокие значения осевого напряжения, и точное значение критического напряжения несколько выше, чем это получается по формулам элементарного решения, но численная величина расхождения незначительна.

Во втором случае, когда опасное состояние наступает уже после того, как осевое напряжение превысит эйлерово значение:

$$\sigma_{оп} > \sigma_э,$$

очертание графика $\sigma_0(\eta)$ существенно отличается от графика, полученного на основе элементарного решения.

Для этого случая точное решение дает график, изображенный на рис. 65. График имеет следующие особенности. От точ-

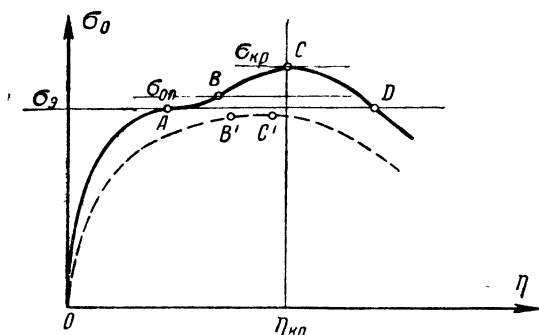


Рис. 65. Схематический график $\sigma_0(\eta)$ для внецентренно сжатого стержня

ки O (начало координат) до точки B (опасное состояние) работа стержня протекает целиком в упругой области. Вблизи точки A при $\sigma_0 \approx \sigma_э$, кривая имеет точку перегиба, здесь выполняется условие (15). Начиная от точки B , стержень работает в упругопластической области. В точке C имеет место максимум, осевое напряжение достигает наибольшего, критического значения. В этой точке выполняется условие экстремума (14). Дальнейшее возрастание прогиба сопровождается уменьшением осевого напряжения. В точке D кривая вторично пересекает прямую $\sigma_0 = \sigma_э$. Между точками B и C кривая еще раз меняет знак кривизны, в точке перегиба имеет место условие (15).

Рассмотренный случай $\sigma_{оп} > \sigma_э$ имеет место для стержней большой гибкости при малых эксцентриситетах. Критическое напряжение в этом случае превышает эйлерово значение и лежит в интервале

$$\sigma_э < \sigma_{кр} < \sigma_т. \quad (16)$$

Элементарное решение дает всегда для критических напряжений значения, меньшие эйлерова:

$$\sigma_{кр} < \sigma_э < \sigma_т.$$

Резюмируя результаты исследования конечных деформаций, можно сказать, что элементарное решение дает вполне достаточную для всех практически важных случаев точность и потому является надежным обоснованием практических методов расчета сжатого и сжато-изогнутого стального стержня.

Исследование конечных деформаций упруго-пластического стержня не преследует цели внесения количественных коррективов в результаты элементарного решения. Смысл этого исследования заключается в изучении *качественных* особенностей поведения стержня при осевом напряжении, близком к эйлерову. Такое изучение является необходимым этапом в разработке проблемы механизма потери устойчивости.

§ 40. КЛАССИФИКАЦИЯ ЯВЛЕНИЙ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ

В настоящем параграфе дается краткая характеристика явлений потери устойчивости, рассмотренных выше более подробно.

Сопоставление различных фактов, относящихся к изучаемой задаче, позволит наметить принципы их классификации.

Необходимо рассматривать отдельно сжатый и сжато-изогнутый стержень. По характеру работы материала следует разделять стержень абсолютно упругий и стержень упруго-пластический. Каждый из возникающих таким образом случаев должен быть рассмотрен дважды: на основе приближенной теории, предполагающей деформации малыми, и на основе точной теории, изучающей конечные деформации¹.

Важнейшим фактором для оценки поведения сжатого и сжато-изогнутого стержня является зависимость между величиной сжимающей силы (или осевым напряжением σ_0) и величиной деформации (наибольшим прогибом y_0). Указанная зависимость, которая может быть представлена графиком $\sigma_0(y_0)$, должна служить основой классификации рассматриваемых явлений.

А. Абсолютно упругий стержень

А1. Приближенная теория (малые деформации)

А11. Сжатый стержень

- 1) Устойчивое прямолинейное равновесие при $\sigma_0 < \sigma_3$.
- 2) Безразличное равновесие при $\sigma = \sigma_3$. Наряду с прямолинейной формой возможно существование бесчисленного множества криволинейных форм равновесия. Деформация по величине существенно неопределенна. [Потеря устойчивости первого рода.]
- 3) Неустойчивое прямолинейное равновесие при $\sigma_0 > \sigma_3$.

А12. Сжато-изогнутый стержень

- 1) Деформации определены по величине и конечны при $\sigma_0 < \sigma_3$.
- 2) По мере приближения σ_0 к σ_3 деформации неограниченно возрастают.
- 3) При $\sigma_0 > \sigma_3$ равновесие невозможно.

¹ Разумеется, термин «точная теория» здесь следует понимать в относительном смысле, так как остаются в силе многочисленные предпосылки, идеализирующие физическую сущность явления.

А2. Точная теория (конечные деформации)

А21. Сжатый стержень

- 1) Устойчивое прямолинейное равновесие при $\sigma_0 < \sigma_3$.
- 2) Разветвление форм равновесия при $\sigma_0 = \sigma_3$. Мгновенное состояние безразличного равновесия при прямолинейной оси стержня. [Потеря устойчивости первого рода.]
- 3) При $\sigma_0 > \sigma_3$, помимо неустойчивой прямолинейной формы равновесия, существует устойчивая криволинейная форма с определенными по величине и конечными деформациями. По мере роста сжимающей силы деформация сначала увеличивается, достигает максимального значения и затем убывает. Сжимающая сила постепенно становится растягивающей.

А22. Сжато-изогнутый стержень¹

- 1) Деформации определены по величине и конечны при любых значениях σ_0 .
- 2) Наибольшая деформация имеет место при $\sigma_0 > \sigma_3$, затем деформация убывает. Сжимающая сила постепенно становится растягивающей.

Б. Упруго-пластический стержень

Б1. Приближенная теория (малые деформации)

Б11. Сжатый стержень

Случай «а». $\sigma_3 > \sigma_T$

- 1) Устойчивое прямолинейное равновесие при $\sigma_0 < \sigma_T$.
- 2) Исчерпание несущей способности при $\sigma_0 = \sigma_T$.

Случай «б». $\sigma_3 < \sigma_T$

- 1) Устойчивое прямолинейное равновесие при $\sigma_0 < \sigma_3$ (первичное равновесное состояние).
- 2) Безразличное равновесие при $\sigma_0 = \sigma_3$. Наряду с прямолинейной формой возможно существование бесчисленного множества криволинейных форм равновесия. Деформация по величине неопределенна, но ограничена опасным состоянием, при котором фибровое напряжение достигает предела текучести. [Потеря устойчивости первого рода.]
- 3) Дальнейшее возрастание деформации возможно только при уменьшении σ_0 . Возникает неустойчивая криволинейная форма равновесия при упруго-пластической работе материала (вторичное равновесное состояние).
- 4) Неустойчивое прямолинейное равновесие при $\sigma_3 < \sigma_0 < \sigma_T$.
- 5) Исчерпание несущей способности при $\sigma_0 = \sigma_T$.

Б12. Сжато-изогнутый стержень

- 1) Упругая стадия работы при $\sigma_0 \leq \sigma_{оп}$ характеризуется возрастанием деформаций и осевого напряжения. Величина опасного напряжения удовлетворяет условиям $\sigma_{оп} < \sigma_3$ и $\sigma_{оп} < \sigma_T$ (первичное состояние равновесия).
- 2) Упруго-пластическая стадия работы при $\sigma_{оп} < \sigma_0 < \sigma_{кр}$. Возрастание деформации сопровождается увеличением σ_0 (первичное состояние равновесия).
- 3) Осовое напряжение достигает максимального, критического значения: $\sigma_0 = \sigma_{кр}$. Величина критического напряжения удовлетворяет условиям $\sigma_{оп} < \sigma_{кр} < \sigma_3$ и $\sigma_{оп} < \sigma_{кр} < \sigma_T$. [Потеря устойчивости второго рода.]

¹ Исключены из рассмотрения равновесные состояния, могущие возникнуть из первоначального путем перескока.

4) Дальнейшее возрастание деформации возможно только при уменьшении σ_0 (вторичное равновесное состояние). Следовательно, каждому значению $\sigma_0 < \sigma_{кр}$ соответствуют два равновесных состояния: первичное с меньшей деформацией и вторичное — с большей деформацией.

Первичное равновесное состояние возникает в процессе естественного возрастания сжимающей силы и является устойчивым. Вторичное равновесное состояние неустойчиво, оно возникает при уменьшении сжимающей силы после достижения критического значения.

Б2. Точная теория (конечные деформации)

Б21. Сжатый стержень

Случай «а». $\sigma_0 > \sigma_T$

- 1) Устойчивое прямолинейное равновесие при $\sigma_0 < \sigma_T$.
- 2) Истощение несущей способности при $\sigma_0 = \sigma_T$.

Случай «б». $\sigma_0 < \sigma_T$

1) Устойчивое прямолинейное равновесие при $\sigma_0 < \sigma_0$ (первичное равновесное состояние).

2) Разветвление форм равновесия при $\sigma_0 = \sigma_0$. Мгновенное состояние безразличного равновесия при прямолинейной оси стержня. [Потеря устойчивости первого рода.]

3) Устойчивое криволинейное равновесие при упругой работе материала: $\sigma_0 < \sigma_0 < \sigma_{оп}$. Одновременно возрастают деформация и сжимающая сила (первичное равновесное состояние).

4) Устойчивое криволинейное равновесие при упруго-пластической работе материала: $\sigma_{оп} < \sigma_0 < \sigma_{кр}$. Возрастание деформации сопровождается увеличением σ_0 (первичное равновесное состояние).

5) Осевое напряжение достигает максимального, критического значения: $\sigma_0 = \sigma_{кр}$. Величина критического напряжения удовлетворяет неравенству $\sigma_0 < \sigma_{кр} < \sigma_T$. [Потеря устойчивости второго рода]

6) Неустойчивое криволинейное равновесие при дальнейшем увеличении деформации и уменьшении σ_0 (вторичное равновесное состояние).

7) Возможно также неустойчивое прямолинейное равновесие при $\sigma_0 < \sigma_0 < \sigma_T$.

8) Истощение несущей способности при $\sigma_0 = \sigma_T$.

Б22. Сжато-изогнутый стержень

Случай «а». $\sigma_{оп} < \sigma_0$ качественно совпадает со случаем Б21 (та же задача на основе приближенной теории).

Случай «б». $\sigma_0 < \sigma_{оп} < \sigma_T$

1) Устойчивое криволинейное равновесие при упругой работе материала: $\sigma_0 < \sigma_{оп}$. Одновременно возрастают деформация и осевое напряжение (первичное равновесное состояние).

2) Устойчивое криволинейное равновесие при упруго-пластической работе материала: $\sigma_{оп} < \sigma_0 < \sigma_{кр}$. Возрастание деформации сопровождается увеличением σ_0 (первичное равновесное состояние).

3) Осевое напряжение достигает максимального критического значения $\sigma_0 = \sigma_{кр}$. Величина критического напряжения удовлетворяет условию $\sigma_0 < \sigma_{оп} < \sigma_{кр} < \sigma_T$. [Потеря устойчивости второго рода.]

4) Неустойчивое криволинейное равновесие при дальнейшем увеличении деформации и уменьшении σ_0 (вторичное равновесное состояние).

Мы наблюдаем, таким образом, два вида явлений потери устойчивости.

1. Потеря устойчивости первого рода — возникновение деформаций ново-

го типа, качественно отличных от тех деформаций, которые система имела до наступления критического состояния.

II. Потеря устойчивости второго рода — развитие существующих с самого начала деформаций до такой величины, при которой увеличение сжимающей силы не может быть воспринято системой, и дальнейшее возрастание деформации возможно только при уменьшении сжимающей силы.

Объединяющим признаком для обоих видов потери устойчивости является наличие касательной к кривой $\sigma_0(y_0)$, параллельной оси Oy_0 . Следовательно, в критическом состоянии системы выполняется условие

$$\frac{d\sigma_0}{dy_0} = 0. \quad (17)$$

В случае потери устойчивости второго рода в этой точке имеет место максимум осевого напряжения; в случае потери устойчивости первого рода эта точка является точкой разветвления форм равновесия.

Необходимо подчеркнуть, что предложенная классификация явлений потери устойчивости не претендует на исчерпывающую полноту и охватывает только рассматриваемые в этой книге задачи.

ОБЩИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

§ 41. ОБОБЩЕНИЕ ЭЙЛЕРОВОЙ ЗАДАЧИ

Расчет стального сжатого и сжато-изогнутого стержня опирается, как это было установлено в главе пятой, на понятие *свободной длины* стержня.

Под свободной длиной понимается длина полуволны изгиба при потере устойчивости или же длина шарнирно опертого стержня той же жесткости, эквивалентного по устойчивости с рассматриваемым.

Представим себе некоторый сжатый или сжато-изогнутый стержень длиной l с условиями закрепления концов, отличными от случая шарнирного опирания. Пусть известна критическая сила N_k стержня, найденная в предположении абсолютной применимости закона Гука. Эквивалентный по устойчивости шарнирно опертый стержень длиной l_0 и той же жесткости EJ , что и рассматриваемый, имеет эйлерову критическую силу

$$N_0 = \frac{\pi^2 EJ}{l_0^2}. \quad (1)$$

Из условия эквивалентности обеих стержней

$$\frac{\pi^2 EJ}{l_0^2} = N_k$$

находим для свободной длины формулу

$$l_0 = \pi \sqrt{\frac{EJ}{N_k}}. \quad (2)$$

Таким образом устанавливается связь между свободной длиной l_0 и критической силой N_k стержня.

Для простейших случаев опорных закреплений концов однопролетного стержня (заделка, шарнирное опирание, свободный конец) величина критической силы может быть найдена путем непосредственного интегрирования дифференциального уравнения изгиба или же одним из приближенных методов. Эта задача

была рассмотрена в главе первой; там были получены значения критической силы для простейших случаев при постоянной по длине стержня жесткости EJ .

Однако этих результатов недостаточно для удовлетворения нужд практики. Действительно, при проектировании стальных конструкций сравнительно редко встречаются однопролетные стержни с четко выраженными условиями закрепления концов. Гораздо чаще приходится иметь дело со стержнями, которые находятся в упругой связи с примыкающими элементами конструкции. Широкое внедрение в практику стального строительства рамных конструкций, т. е. систем с жесткими сопряжениями элементов, еще более расширило круг задач, которые приходится решать проектировщику при установлении свободной длины сжатых стержней. Отсюда возникла настоятельная необходимость в разработке методов исследования устойчивости статически неопределимых стержневых систем. Эта проблема представляет собой в известном смысле обобщение эйлеровой задачи, так как речь идет об установлении величины критической силы в предположении упругой работы материала для стержня, входящего в состав некоторой системы стержней.

Эта задача может быть успешно решена путем разработки *общих (канонических) методов* исследования устойчивости статически неопределимых стержневых систем. Значительные успехи в этом направлении были достигнуты благодаря трудам советских ученых, и в настоящее время создана стройная и удобная для практического применения теория устойчивости стержневых систем.

Прежде чем перейти к изложению общей теории, сформулируем положенные в основу предпосылки:

1. Рассматривается плоская система абсолютно упругих прямых стержней, соединенных друг с другом жестко или же шарнирно.

2. Стержни системы до момента потери устойчивости испытывают только продольные усилия (сжатие или растяжение).

3. Предполагается, что в момент потери устойчивости стержни системы изгибаются так, что они не выходят из рассматриваемой плоскости.

4. Исследование устойчивости основывается на предположении о малости деформации, вследствие чего допустимо пользоваться дифференциальным уравнением технической теории изгиба балок

$$EJy^{IV} + Ny'' = 0, \quad (3)$$

где y — ордината упругой кривой; штрихами обозначается операция дифференцирования по абсциссе x .

5. Продольными деформациями стержней можно пренебречь по сравнению с деформациями изгиба в момент потери устойчивости.

Если в состав системы входят сжатые стержни, то при достижении сжимающими силами известной величины рама теряет устойчивость, т. е. наряду с первоначальной прямолинейной формой равновесия становится возможной криволинейная форма равновесия. Назовем *критическими* те значения сжимающих сил, при которых рама теряет устойчивость; величина критической силы для каждого из сжатых стержней системы зависит не только от схемы конструкции и от соотношения жесткостей, но и от соотношения между сжимающими силами в момент потери устойчивости.

Мы будем предполагать, что достижение критического состояния происходит путем одновременного возрастания всех сжимающих сил системы. Таким образом, если N_1, N_2, N_3, \dots представляют собой фактические величины сжимающих сил, то потеря устойчивости происходит при возрастании всех сил в некоторое число η раз. Критические силы будут равны

$$N_{1к} = N_1 \eta; \quad N_{2к} = N_2 \eta; \quad N_{3к} = N_3 \eta; \dots$$

Такое предположение соответствует основным предпосылкам расчета стальных конструкций. Величина η представляет собой коэффициент запаса по отношению к упругой потере устойчивости. Эту условную величину не следует смешивать с фактическим коэффициентом запаса, природа которого была рассмотрена выше, в главе пятой.

Итак, для определенности задачи, помимо схемы конструкции, должны быть заданы также сжимающие силы в элементах системы. Однако, так как величина η не представляет интереса и важно определить лишь величины критических сил, то достаточно иметь соотношение между сжимающими силами

$$N_1 : N_2 : N_3 : \dots = n_1 : n_2 : n_3 : \dots;$$

где n_1, n_2, \dots — числовые коэффициенты.

В силу принятого выше допущения между критическими силами должно иметь место то же соотношение

$$N_{1к} : N_{2к} : N_{3к} : \dots = n_1 : n_2 : n_3 : \dots \quad (4)$$

Предположим теперь, как это принято повсюду ниже, что жесткость каждого из стержней постоянна по всей длине его. Путем интегрирования дифференциального уравнения изгиба (3) находим для изогнутой оси каждого из сжатых стержней рамы выражение вида

$$y = C_1 \sin \sqrt{\frac{N}{EJ}} x + C_2 \cos \sqrt{\frac{N}{EJ}} x + C_3 x + C_4, \quad (5)$$

для каждого из растянутых стержней — выражение вида

$$y = C_5 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{|N|}{EJ}} x + C_6 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{|N|}{EJ}} x + C_7 x + C_8, \quad (6)$$

(где sh , ch — гиперболические функции; $|N|$ — абсолютное значение растягивающей силы) и, наконец, для каждого из ненагруженных стержней — выражение вида

$$y = C_9 x^3 + C_{10} x^2 + C_{11} x + C_{12}. \quad (7)$$

В каждое из этих выражений входит по четыре постоянных интегрирования C_i . Если общее число стержней рамы равно s , то число постоянных будет $n=4s$. Для определения постоянных служат граничные условия и условия сопряжения между стержнями. Можно доказать, что общее число этих условий в точности равно n . Составив эти условия, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных C_i

$$\left. \begin{aligned} C_1 a_{11} + C_2 a_{12} + C_3 a_{13} + \dots + C_n a_{1n} &= 0; \\ C_1 a_{21} + C_2 a_{22} + C_3 a_{23} + \dots + C_n a_{2n} &= 0; \\ C_1 a_{31} + C_2 a_{32} + C_3 a_{33} + \dots + C_n a_{3n} &= 0; \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots; \\ C_1 a_{n1} + C_2 a_{n2} + C_3 a_{n3} + \dots + C_n a_{nn} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Так как стержни испытывают только лишь продольные усилия, то уравнения системы (8) являются однородными, т. е. все свободные члены равны нулю. Коэффициенты a_{ik} представляют собой функции аргументов u_1, u_2, u_3, \dots . Аргумент стержня характеризует его длину, жесткость и сжимающую силу и является величиной нулевой размерности

$$u = \sqrt{\frac{N}{EJ}} l. \quad (9)$$

В общем случае число аргументов равно числу стержней. Для сжатого стержня $u > 0$, для свободного от продольных усилий — $u = 0$, для растянутого стержня аргумент является мнимой величиной: $u = i|u|$. В этом последнем случае тригонометрические функции уравнения (5) заменяются гиперболическими функциями уравнения (6). Пользуясь зависимостью (4), устанавливаем следующее соотношение между аргументами стержней

$$u_1 : u_2 : u_3 : \dots = \sqrt{\frac{N_1}{lJ_1}} l_1 : \sqrt{\frac{N_2}{lJ_2}} l_2 : \sqrt{\frac{N_3}{lJ_3}} l_3 : \dots \quad (10)$$

Если обозначить главный детерминант (определитель) системы уравнений (8) через Δ , то любая из неизвестных величин C_i может быть найдена по формуле

$$C_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

где Δ_i представляет собой определитель порядка n , который получается из Δ путем замены i -го столбца столбцом свободных членов. Так как свободные члены системы (8) равны нулю, то и все детерминанты Δ_i тождественно равны нулю.

Примем во внимание, что величины C_i представляют собой некоторые элементы изгиба, следовательно, если все они одновременно равны нулю, то изгиб не имеет места. Система (8) имеет отличные от нуля решения тогда и только тогда, если детерминант системы Δ равен нулю. Критерием наступления состояния безразличного равновесия является равенство нулю главного детерминанта системы (8):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (11)$$

Пользуясь зависимостью (10), можно каждый из аргументов u_1, u_2, u_3, \dots выразить через один какой-либо из них u . Тогда все коэффициенты a_{ik} будут функциями одного аргумента:

$$a_{ik} = f_{ik}(u) \quad (12)$$

и критерий потери устойчивости может быть записан в виде

$$\Delta(u) = |a_{ik}| = 0. \quad (13)$$

Наименьший положительный корень этого трансцендентного уравнения определяет критическое значение аргумента u_k . Зная критическое значение одного из аргументов и пользуясь зависимостью (10), находим критические значения всех прочих. Таким образом, поставленная задача может считаться решенной.

Исходя из выражений для критических сил

$$N_{1k} = \frac{u_1^2 EJ_1}{l_1^2}; \quad N_{2k} = \frac{u_2^2 EJ_2}{l_2^2}; \quad N_{3k} = \frac{u_3^2 EJ_3}{l_3^2}; \dots \quad (14)$$

и воспользовавшись формулой (2), находим свободные длины

$$l_{01} = \frac{\pi}{u_{1k}} l_1; \quad l_{02} = \frac{\pi}{u_{2k}} l_2; \quad l_{03} = \frac{\pi}{u_{3k}} l_3; \dots, \quad (15)$$

где $u_{1k}, u_{2k}, u_{3k}, \dots$ — критические значения аргументов.

Помимо этого, представляется возможным установить также характер деформации рамы в момент потери устойчивости. Предположим, что одной из неизвестных C_m приписана некоторая произвольная величина. Переносим m -й столбец в правую часть системы уравнений (8), получим новую совокупность n уравнений с $(n-1)$ неизвестными. Однако, так как главный определитель системы (8) равен нулю, то одно из полученных уравнений можно рассматривать как следствие других. Полученная новая система уравнений может быть разрешена и все неизвестные выражены через C_m , если только соответствующий субдетерминант отличен от нуля. Форма изгиба определена с точностью до произвольного множителя C_m .

Каждому значению C_m соответствует определенное положение равновесия рамы. Следовательно, при достижении критиче-

ского состояния возможно бесчисленное множество положений равновесия системы, сопровождающихся изгибом образующих систему стержней. Достаточно сколь угодно малой, но конечной по величине поперечной (т. е. вызывающей изгиб стержней) нагрузки, чтобы деформации рамы стали безгранично возрастать.

Если поперечная нагрузка действует на стержни рамы еще до наступления критического состояния, то стержни все время находятся в состоянии изгиба. По мере приближения сжимающих сил к критическому значению деформации изгиба возрастают все более и более интенсивно и асимптотически приближаются к бесконечности. Мы получаем полную аналогию с уже рассмотренным в главах первой и второй случаем сжатого и сжато-изогнутого стержня.

Важно заметить, что наличие поперечных нагрузок (или эксцентриситетов приложения сжимающих сил) изменяет картину работы рамы, но не влияет на величину критических сил¹. В самом деле, вызывающая изгиб нагрузка аналитически отразится наличием отличных от нуля свободных членов в системе уравнений (8), но служащее для определения критических сил условие (11) сохраняется полностью. Отсюда становится понятным, почему при определении свободной длины для стержней рамы следует учитывать только лишь продольные усилия в стержнях и исключать из рассмотрения поперечные нагрузки и эксцентриситеты, вызывающие изгиб.

Определив свободные длины элементов рамы и зная величины изгибающих моментов M , подсчитанные без учета влияния продольных сжимающих (или растягивающих) сил, получаем возможность рассчитать сжато-изогнутые элементы рамы при помощи методов, изложенных в главе пятой.

§ 42. ПРЕДПОСЫЛКИ РАЗВИТИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ

Приоритет в постановке задачи исследования устойчивости плоских стержневых систем принадлежит Б. Г. Галеркину, который в своих работах² рассмотрел ряд частных случаев, основываясь на дифференциальных уравнениях изгиба (3).

Попытка разработки общего метода, не требующего каждый раз интегрирования дифференциального уравнения, принадлежит Р. Мизесу³, который вывел соотношения между элементами изгиба потерявшего устойчивость стержня.

¹ Предполагается, что продольные усилия в стержнях рамы являются заранее заданными и что приращением этих усилий вследствие статической неопределимости системы можно пренебречь.

² Б. Г. Галеркин, Теория продольного изгиба, «Известия Петербургского политехнического института», 1909; Стержни и пластинки, «Вестник инженеров», 1915. См. также Собрание сочинений, т. I, изд. Академии наук СССР, 1952.

³ R. v. Mises, Über die Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie, Zeitschrift f. angew. Mathematik u. Mechanik, 1923. R. v. Mises und J. Ratzersdorfer, статьи в том же журнале, 1925 и 1926.

Метод Мизеса не обладает достаточной общностью, основывается на несколько отвлеченных статических представлениях и приводит к определителю высокого порядка при исследовании даже простейших систем. Кроме того, метод Мизеса требует предварительного исключения ряда подлежащих определению неизвестных, что приводит часто к довольно громоздким выкладкам.

Чрезвычайно большое преимущество для каждого расчетного метода представляет каноническая форма решения. Уравнения такого метода имеют строго установленную каноническую структуру, вычисление коэффициентов подчиняется определенному, однажды сформулированному правилу.

Наиболее широкое развитие канонические методы получили в теории расчета статически неопределимых систем. Детально разработанный аппарат метода сил или же метода деформаций позволяет не только свести к минимуму число неизвестных, но также избежать всякого рода промежуточных выкладок. Вычисление перемещений или реакций основной системы (коэффициентов расчетных уравнений) производится по однажды установленным формулам. Благодаря симметричной форме канонических уравнений число подлежащих вычислению коэффициентов существенно снижается. Эта же самая симметричная форма канонических уравнений делает возможным их решение по схеме Гаусса. Расчет рамы по методу сил (или методу деформаций) представляет собой в известном смысле некоторый *канонический алгоритм*, т. е. совокупность простых алгебраических действий, совершаемых в строго определенной последовательности.

Вполне естественной является мысль построить аналогичный аппарат для исследования устойчивости рамных систем. Однако обобщение методов статического расчета рам на случай исследования их устойчивости не может быть произведено чисто механически. Несмотря на то, что объектом исследования для обеих задач является одна и та же рама, специфические особенности проблемы устойчивости сказываются весьма резко. Расчет статически неопределимой рамы представляет собой простую линейную задачу, в то время как та же рама при учете изгибающих моментов от продольных сил является уже нелинейной системой, для которой неприменим закон независимости действия сил в его обычной трактовке.

Только лишь при тщательном исследовании обнаруживается глубокая связь между этими двумя родственными задачами. Ниже будут установлены некоторые основные положения, являющиеся видоизменением или обобщением элементарных законов строительной механики. На базе этих положений представляется возможным дальнейшее развитие общих методов.

§ 43. ФОРМУЛА МОРА ДЛЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Обобщение методов расчета статически неопределимых систем на случай действия продольных сжимающих сил основывается на общих свойствах исследуемой задачи. Некоторые из этих общих свойств уже были указаны в главе второй; дальнейшее развитие вопроса составляет содержание настоящего параграфа.

Рассмотрим сжатый стержень рамы в момент потери системой устойчивости. Заменяем влияние примыкающих к стержню элементов рамы усилиями, действующими на его концах. Если в состоянии прямолинейного равновесия стержень испытывал только сжатие от продольной силы N , то в момент потери устойчивости на стержень воздействует, кроме того, ряд вызывающих изгиб усилий (узловые моменты, поперечные силы и пр.). По отношению к данному стержню эти вызывающие изгиб усилия можно рассматривать как внешние нагрузки. Условимся далее исключить сжимающую силу N из понятия нагрузки и будем считать ее некоторым заданным свойством системы. Тогда, в силу общих свойств задачи, деформации стержня будут являться линейными функциями от нагрузок. Это обстоятельство является следствием линейности исходного дифференциального уравнения. Сформулированное положение представляет собой закон наложения нагрузок (закон суперпозиции) в специфической трактовке для данной задачи.

Таким образом, изогнутую ось y стержня, сжатого силой N и подверженного воздействию некоторых нагрузок q_1 и q_2 , можно получить, если наложить изогнутую ось y_1 при воздействии N и q_1 на изогнутую ось y_2 при воздействии N и q_2 , т.е.

$$y = y_1 + y_2.$$

Отсюда также следует, что если изогнутая ось стержня, сжатого силой N , при воздействии единичной нагрузки $q=1$ есть y_1 , то при воздействии аналогичной нагрузки $q \neq 1$ деформация будет равна

$$y = qy_1.$$

Важнейшим фактором, обуславливающим возможность распространения общих методов строительной механики на сжато-изогнутые стержни, является справедливость формулы Мора для перемещений. Ограничиваясь рассмотрением только лишь деформаций изгиба, имеем

$$a_{ik} = \sum \int \frac{M_i M_k}{EJ} dx. \quad (16)$$

Здесь a_{ik} — перемещение по направлению единичного силового фактора i , вызванного нагрузкой k ;

M_i — ордината эпюры моментов состояния i , вычисленная без учета влияния продольных сжимающих сил;

M_k — ордината эпюры моментов от нагрузки k , вычисленная с учетом влияния продольных сжимающих сил.

Интегрирование производится по всей длине стержня, а суммирование распространяется на все стержни системы¹.

Доказательство обобщенной формулы Мора (16) для перемещений может быть получено на основе теоремы о взаимности работ. Для этого нужно рассмотреть два упомянутых выше состояния и приравнять работу внешних сил состояния i на перемещениях состояния k работе внутренних сил состояния k на перемещениях состояния i .

Очень простое доказательство обобщенной формулы Мора (16) может быть получено также при помощи выведенного в главе первой интегрального уравнения устойчивости. Для сжатого-изогнутого стержня это уравнение будет иметь вид

$$y(x) = \bar{y}(x) + \int_0^l \frac{M_i(x, z) N_y(z)}{EJ} dz,$$

где $\bar{y}(x)$ — прогиб, подсчитанный без учета влияния продольных сжимающих сил. Этот прогиб может быть найден при помощи обычной формулы Мора статики сооружений

$$\bar{y}(x) = \int_0^l \frac{M_i(x, z) M_k(z)}{EJ} dz.$$

Здесь $M_k(x)$ — ордината эпюры изгибающих моментов состояния k , подсчитанная без учета влияния продольных сжимающих сил.

Принимая во внимание, что

$$M_k = M_k + N y,$$

получаем

$$y(x) = \int_0^l \frac{M_i(x, z) M_k(z)}{EJ} dz. \quad (17)$$

Распространение этой зависимости на случай системы стержней приводит к формуле (16). Таким образом, обобщенная фор-

¹ Обобщение формулы Мора указано В. Г. Чудновским в статье «Расчет рам на устойчивость по методу сил», сборник, посвященный 75-летию Е. О. Патона, изд. Академии наук УССР, 1946 и С. Д. Лейтесом — в статье «О применении метода сил к исследованию устойчивости статически неопределимых систем», «Исследования по теории сооружений», вып. IV, Стройиздат, 1949.

Метод сил в применении к задачам устойчивости разрабатывал также А. Ф. Смирнов в труде «Статическая и динамическая устойчивость сооружений», Трансжелдориздат, 1947.

мула Мора доказана для линейных перемещений. Дифференцируя по x обе части соотношения (17), получаем доказательство обобщенной формулы Мора для угловых перемещений.

Рассмотрим следующий простой пример применения формулы (16). Пусть требуется определить угол поворота на левой опоре шарнирно опертого стержня, сжатого силами N и нагру-

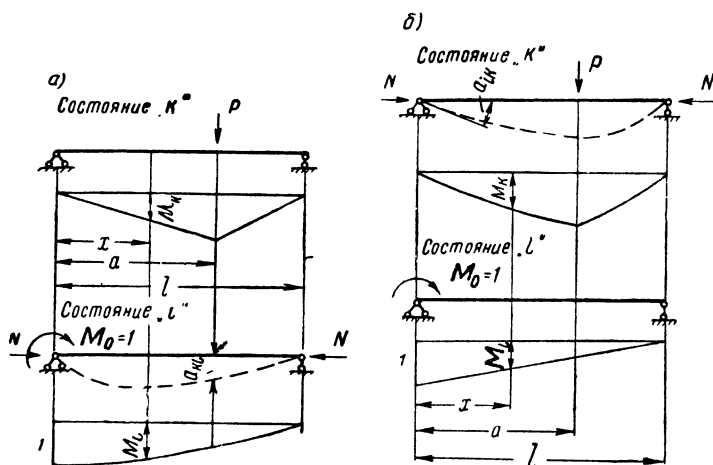


Рис. 66. Пример применения формулы Мора

женного сосредоточенной силой P на расстоянии a от этой опоры (рис. 66,а). Назовем это состояние нагрузки состоянием k . На основании результатов главы первой выражение для изгибающего момента имеет вид

$$M_k = \frac{P}{a} \cdot \frac{\sin \alpha (l-a)}{\sin \alpha l} \sin \alpha x \quad (x < a);$$

$$M_k = \frac{P}{a} \cdot \frac{\sin \alpha a}{\sin \alpha l} \sin \alpha (l-x) \quad (x > a).$$

Здесь

$$\alpha = \sqrt{\frac{N}{EJ}}. \quad (18)$$

Освободив стержень от сжимающей силы и от нагрузки и прикладывая единичный силовой фактор по направлению искомого перемещения, образуем состояние i . В данном случае силовым фактором будет опорный момент $M_0 = 1$, следовательно:

$$M_i = \frac{l-x}{l}.$$

Употребляем букву M , чтобы подчеркнуть то обстоятельство, что моменты вычисляются без учета влияния продольных сжимающих сил. Выполняя интегрирование по формуле (16), находим

$$\varphi = a_{ik} = \frac{P}{EJ} \cdot \frac{1}{\alpha l \sin \alpha l} \left[\sin \alpha (l-a) \int_0^a (l-x) \sin \alpha x dx + \right. \\ \left. + \sin \alpha a \int_0^a (l-x) \sin \alpha (l-x) dx \right] = \frac{P}{N} \left[\frac{\sin \alpha (l-a)}{\sin \alpha l} - \frac{l-a}{l} \right].$$

Этот же самый результат получится, если мы продифференцируем по x выражение для ординаты упругой кривой

$$y_k = \frac{P}{N\alpha} \left[\frac{\sin \alpha (l-a)}{\sin \alpha l} \sin \alpha x - \frac{l-a}{l} \alpha x \right] \quad (x < a)$$

и положим $x = 0$. Действительно:

$$\frac{dy_k}{dx} = \frac{P}{N} \left[\frac{\sin \alpha (l-a)}{\sin \alpha l} \cos \alpha x - \frac{l-a}{l} \right],$$

откуда при $x=0$ получаем выражение для φ .

Смысл обобщения интеграла Мора на случай сжато-изогнутого стержня заключается не в том, чтобы дать удобную формулу для вычисления перемещений. В самом деле, для того чтобы воспользоваться этой формулой, необходимо знать уравнение моментов M_k с учетом влияния продольных сжимающих сил, т. е. иметь готовое решение задачи. Таким образом, применение формулы (16) не исключает необходимости интегрировать дифференциальное уравнение изгиба. Смысл полученного обобщения формулы Мора заключается главным образом в возможности построения дальнейших статических аналогий, благодаря чему хорошо разработанный аппарат строительной механики распространяется на случай сжато-изогнутого стержня. Что касается практических методов вычисления перемещений, то следует иметь в виду, что при решении обычных задач строительной механики в большинстве случаев интегрирование по Мору фактически не выполняется и заменяется вычислением по готовым формулам.

Вернемся теперь к рассмотренному выше примеру и будем понимать под состоянием k стержень, нагруженный силой P , но освобожденный от воздействия сжимающей силы N . В состоянии i стержень испытывает сжатие от силы N и нагружен опорным моментом $M_0 = 1$ (рис. 66,б). Изгибающие моменты состояния k записываются в виде

$$M_k = P \frac{l-a}{l} \quad x(x < a);$$

$$M_k = P \frac{l-a}{l} x - P(x-a) \quad (x > a).$$

Выражение для изгибающего момента состояния i должно быть написано с учетом воздействия сжимающей силы N . Получаем на основании результатов главы второй

$$M_i = \frac{\sin \alpha (l-x)}{\sin \alpha l}.$$

Вычисляя интеграл

$$a_{ki} = \int_0^l \frac{M_k M_i}{EJ} dx = \frac{P}{EJ} \cdot \frac{1}{\sin \alpha l} \left[\frac{l-a}{l} \int_0^l x \sin \alpha (l-x) dx - \int_0^l (x-a) \sin \alpha (l-x) dx \right],$$

находим

$$a_{ki} = \frac{P}{N} \left[\frac{\sin \alpha (l-a)}{\sin \alpha l} - \frac{l-a}{l} \right].$$

Путем сравнения с полученным выше значением a_{ik} приходим к выводу, что $a_{ik} = a_{ki}$. Этот факт является следствием общего закона взаимности перемещений

$$a_{ik} = \sum \int \frac{M_i M_k}{EJ} dx = \sum \int \frac{M_i M_k}{EJ} dx = a_{ki}. \quad (19)$$

Этот же самый принцип может быть интерпретирован как закон взаимности работ, согласно которому работа сил первого состояния на перемещениях второго состояния равна работе сил второго состояния на перемещениях первого состояния.

Приложение этого принципа к рассмотренному выше примеру поясняется следующими соображениями. Возьмем из состояния k перемещение φ — угол поворота на опоре от силы P , вычисленный с учетом воздействия сжимающей силы N . Из состояния i должен быть взят силовой фактор $M_0 = 1$. Работа сил состояния i на перемещениях состояния k равна

$$A_{ik} = M_0 \varphi = \frac{P}{N} \left[\frac{\sin \alpha (l-a)}{\sin \alpha l} - \frac{l-a}{l} \right].$$

Возьмем теперь из состояния i перемещение δ — прогиб на расстоянии a от левой опоры от момента $M_0 = 1$, вычисленный с учетом воздействия сжимающей силы N . Из состояния k должен быть взят силовой фактор P . Работа сил состояния k на перемещениях состояния i равна

$$A_{ki} = P \delta = \frac{P}{N} \left[\frac{\sin \alpha (l-a)}{\sin \alpha l} - \frac{l-a}{l} \right].$$

Следует иметь в виду, что при применении принципа взаимности работ перемещение всегда должно быть взято из состояния, характеризующегося наличием сжимающей силы.

Обобщенная формула Мора (19) показывает, что в отличие от обычных задач статики сооружений вычисление перемещения для сжато-изогнутого стержня может быть произведено двумя способами, именно по формуле

$$a_{ik} = \sum \int \frac{M_i M_k}{IJ} dx$$

или же по формуле

$$a_{ik} = \sum \int \frac{M_i M_k}{EJ} dx.$$

Само собой разумеется, что выявленные закономерности сохраняют свою силу также и для системы стержней, причем часть стержней системы может быть сжата, часть — растянута, а часть — не подвержена воздействию сжимающих сил.

Для практического вычисления перемещений в простейших случаях может служить прилагаемая маленькая табличка интегралов Мора (табл. 15).

Таблица 15

Интегралы Мора (множитель $\frac{l}{EJ}$)

M_i M_k			
	$\frac{1}{u^2} (1 - u \operatorname{ctg} u)$	$\frac{1}{u^2} \left(\frac{u}{\sin u} - 1 \right)$	$\frac{1 - \cos u}{u \sin u}$
	—	$\frac{1}{u^2} \left(\frac{\operatorname{tg} u}{u} - 1 \right)$	$\frac{1}{u^2} \left(\frac{1}{\cos u} - 1 \right)$
	—	$\frac{1}{u^2} \left(\frac{1}{\cos u} - 1 \right)$	$\frac{\operatorname{tg} u}{u}$

§ 44. МЕТОД СИЛ

Общий путь исследования устойчивости статически неопределимой системы при помощи обобщения метода сил заключается в следующем.

Устраняя лишние связи, образуем из заданной системы основную статически определимую систему. Прикладываем единичные силовые факторы $X_i = 1$ по направлению отброшенных связей и для каждого из полученных таким путем состояний i строим, во-первых, эпюру моментов M_i , вычисленных с учетом влияния продольных сжимающих сил, и, во-вторых, эпюру моментов M_i , для которой это влияние не учитывается. Вычисляем перемещения $a_{ik} = a_{ki}$ по обобщенной формуле Мора, интегрируя соответствующие эпюры M_i и M_k или же M_i и M_k .

Для определения величины лишних неизвестных X_i служит система канонических уравнений метода сил

$$\left. \begin{aligned} a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \dots + a_{1n} X_n &= 0; \\ a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \dots + a_{2n} X_n &= 0; \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots; \\ a_{n1} X_1 + a_{n2} X_2 + \dots + a_{nn} X_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

В случае отсутствия поперечной нагрузки на стержни уравнения этой системы будут однородными. Число этих уравнений соответствует числу лишних неизвестных n .

Условие потери устойчивости заключается в равенстве нулю главного детерминанта системы (20):

$$\Delta = |a_{ik}| = 0.$$

Предположим, что в состав рассматриваемой рамы входят несколько сжатых стержней, которые отличаются друг от друга длиной, жесткостью и величиной сжимающей силы. Каждому из этих стержней соответствует свое значение аргумента: u_1, u_2, u_3, \dots . Входящие в систему расчетных уравнений перемещения a_{ik} являются в общем случае функциями этих аргументов:

$$a_{ik} = f_{ik}(u_1, u_2, u_3, \dots),$$

следовательно, и определитель системы является функцией тех же аргументов. Критерий потери устойчивости записывается в виде

$$\Delta(u_1, u_2, u_3, \dots) = 0. \quad (21)$$

Основываясь на принятом предположении о том, что потеря устойчивости происходит путем одновременного возрастания всех сжимающих сил системы, можно при помощи соотношения (10) выразить каждый из аргументов u_1, u_2, u_3, \dots через

один из них u . После этого критерий потери устойчивости принимает вид

$$\Delta(u) = 0. \quad (22)$$

Наименьший положительный корень этого уравнения определяет критическое значение аргумента u_k . Отсюда могут быть определены критические значения всех прочих аргументов. Свободные длины стержней определяются по формулам (15), после чего задачу следует считать решенной.

Рассмотрим следующий пример, иллюстрирующий применение метода сил при исследовании устойчивости однажды статически неопределимой системы.

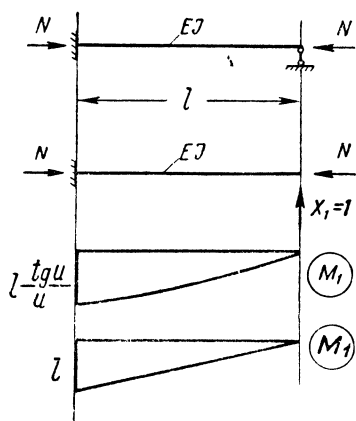


Рис. 67. Исследование устойчивости статически неопределимого стержня при помощи метода сил

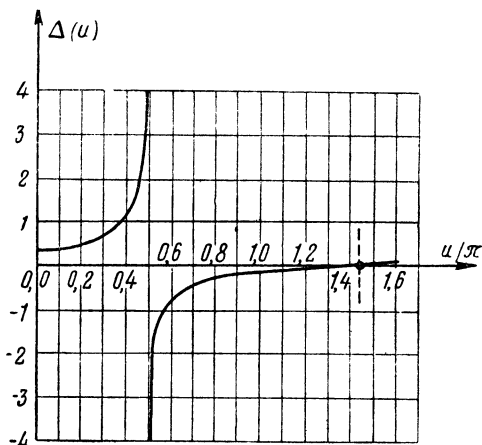


Рис. 68. График $\Delta(u) = \frac{1}{u^2} \left(\frac{\operatorname{tg} u}{u} - 1 \right)$

Требуется исследовать устойчивость стержня, одним концом заделанного и другим концом шарнирно опертого. Примем за лишнее неизвестное X_1 величину реакции шарнирной опоры. Построение эпюр M_1 и M_1 не представляет затруднений (рис. 67). Пользуясь табл. 19, находим

$$a_{11} = \frac{l^3}{EJ} \cdot \frac{1}{u^2} \left(\frac{\operatorname{tg} u}{u} - 1 \right).$$

Каноническое уравнение метода сил имеет вид

$$X_1 a_{11} = 0.$$

Отбрасывая постоянные множители, критерий потери устойчивости получаем в виде

$$\Delta(u) = \frac{1}{u^2} \left(\frac{\operatorname{tg} u}{u} - 1 \right) = 0.$$

График (рис. 68) изображает зависимость величины $\Delta(u)$ от аргумента u . При $u=0$ $\Delta(0) = \frac{1}{3}$, так как при отсутствии сжимающих сил $a_{11} = \frac{l^3}{3EJ}$. По мере возрастания аргумента u от 0 до $\frac{\pi}{2}$ величина $\Delta(u)$ возрастает от значения $\frac{1}{3}$ до $+\infty$. При $u = \frac{\pi}{2}$ функция $\Delta(u)$ испытывает разрыв непрерывности от $+\infty$ до $-\infty$. При $u > \frac{\pi}{2}$ величина $\Delta(u)$ монотонно возрастает и становится равной нулю в точке с абсциссой $u_k \approx 1,43\pi$. Это значение аргумента удовлетворяет критерию потери устойчивости и является критическим. Дальнейший ход изменения функции

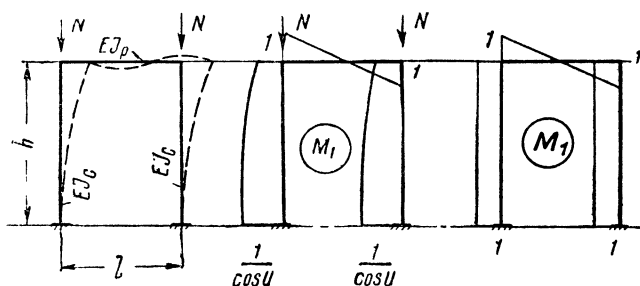


Рис. 69. Исследование устойчивости П-образной рамы при помощи метода сил (антисимметричная деформация)

$\Delta(u)$ не представляет интереса, поскольку мы ограничили исследование критическим состоянием системы. Свободная длина для рассматриваемого стержня равна $l_0 = \frac{\pi}{u_k} l \approx 0,7 l$.

Критерий потери устойчивости равносителен уравнению $\operatorname{tg} u = u$, полученному в главе первой непосредственным путем при исследовании той же задачи.

Очертание графика $\Delta(u)$, полученного при рассмотрении этого простого примера, сохраняет свои характерные особенности для всех случаев, когда расчетными уравнениями являются уравнения метода сил. Главная особенность этого графика — разрыв кривой от $+\infty$ до $-\infty$ при значении аргумента u , соответствующем критическому состоянию для основной системы.

В качестве второго примера рассмотрим симметричную П-образную раму с защемленными в основании стойками. Предположим, что каждая из стоек сжимается силой N (рис. 69). В силу симметрии системы потеря устойчивости произойдет при симметричной или антисимметричной форме изгиба. Каждая из этих форм может быть рассмотрена в отдельности. Ограничим-

ся здесь исследованием только лишь антисимметричной формы изгиба. Основную систему образуем, разрезая ригель рамы по оси симметрии. Лишние неизвестные — момент M и продольная сила N в месте разреза — равны нулю, так как вызываемые ими деформации (и эпюры моментов) являются симметричными. Остается только одно лишнее неизвестное — поперечная сила $Q = X_1$. Построив эпюры M_1 и M_2 , находим

$$a_{i1} = \frac{l}{EJ_p} \cdot \frac{1}{3} + 2 \frac{h}{EJ_c} \cdot \frac{\operatorname{tg} u}{u},$$

где l, EJ_p — длина и жесткость ригеля;
 h, EJ_c — длина и жесткость каждой из стоек;
 u — аргумент для каждой из стоек.
 Примем обозначение

$$k = \frac{EJ_p h}{EJ_c l}; \quad (23)$$

тогда критерий потери устойчивости записывается в виде

$$6k + u \operatorname{ctg} u = 0. \quad (24)$$

В отличие от первого примера критерий потери устойчивости содержит здесь параметр k , представляющий собой отношение погонных жесткостей ригеля и стойки. Каждому численному значению параметра k соответствует свое критическое значение аргумента u_k . Отсюда следует, что и критическая сила N_k и свободная длина стоек являются функциями параметра k . Так, случай $k=0$ соответствует шарнирному сопряжению стоек с ригелем. Уравнение (24) дает в этом случае $u \operatorname{ctg} u = 0$,

откуда $u_k = \frac{\pi}{2}$. Свободная длина для каждой из стоек $l_0 = 2h$. В случае $k = \infty$ (бесконечно жесткий ригель) из условия $u \operatorname{ctg} u = -\infty$ находим $u_k = \pi$. Свободная длина стоек в этом случае $l_0 = h$. При значении $0 < k < \infty$ свободная длина стоек изменяется в пределах $2h > l_0 > h$.

Помимо определения критической величины аргумента, метод сил дает возможность разыскать также форму изгиба рамы в момент потери устойчивости. Каждому из единичных состояний X_1, X_2, \dots, X_n соответствует некоторая форма изгиба, которая определяется, если известно критическое значение аргумента. Суммарная деформация рамы получается путем наложения этих единичных состояний, каждое из которых должно быть предварительно умножено на соответствующий множитель X_1, X_2, \dots . Величина лишних неизвестных остается существенно неопределенной, но могут быть найдены отношения

$$\frac{X_1}{X_m}, \frac{X_2}{X_m}, \dots, \frac{X_n}{X_m},$$

где X_m — одно из лишних неизвестных.

Для этого в уравнениях (20) члены, содержащие X_m , должны быть перенесены в правую сторону. Так как определитель системы (20) равен нулю, то одно из уравнений системы является следствием других. Отбрасывая одно из уравнений (20) и подставляя $u=u_k$, получаем систему $(n-1)$ уравнений относительно $(n-1)$ неизвестного. Так как полученные уравнения являются, вообще говоря, неоднородными, то система допускает единственное и конечное решение, если только определитель системы отличен от нуля. Все неизвестные выражаются через одно из них X_m и задача о разыскании формы изгиба в момент потери устойчивости решена.

В рассмотренных примерах простота решения определялась простотой изучения основной системы. Однако в общем случае основная система может оказаться уже не столь простой и легкой для изучения. Несмотря на статическую определенность, основная система может представлять собой сложную совокупность стержней, для которой построение эпюр M_i окажется весьма затруднительным и потребует трудоемких выкладок. Это обстоятельство существенно ограничивает практическую применимость метода сил для исследования статически неопределимых систем. Тем не менее принципиальное значение метода сил диктует необходимость его тщательного изучения и разработки. Как мы увидим далее, целый ряд задач может быть весьма успешно решен при помощи метода сил.

Изучение метода сил позволяет установить некоторые важные теоремы, дающие ориентировку в сложных задачах устойчивости стержневых систем.

§ 45. УРАВНЕНИЕ ТРЕХ МОМЕНТОВ

Метод сил с успехом может быть применен к исследованию устойчивости неразрезных балок. Рассмотрим многопролетный стержень, опирающийся в точках $0, 1, \dots, i-1, i, i+1, \dots, n-1, n$. Обозначим через l_i пролет стержня между опорами $i-1, i$. Пусть жесткость стержня в пределах каждого из пролетов l_i постоянна и равна EJ_i ; сжимающую силу для пролета l_i обозначим через N_i . Каждому пролету неразрезной балки будет соответствовать свое значение аргумента

$$u_i = \sqrt{\frac{N_i}{EJ_i}} l_i.$$

Образует основную систему, вставляя шарниры над опорами стержня. Лишними неизвестными являются опорные моменты, которые условимся обозначать по номеру опоры M_i . Построение эпюр моментов единичных состояний не представляет затруднений. На рис. 70 сплошными линиями показаны эпюры M_i (без учета влияния сжимающих сил), а пунктиром — эпюры M_i (с учетом этого влияния).

Для вычисления перемещений в основной системе достаточно ограничиться изучением деформаций шарнирно опертого стержня. Пусть M_A момент на опоре такого стержня; найдем значения углов поворота φ_A и φ_B на опорах, вызванных воздей-

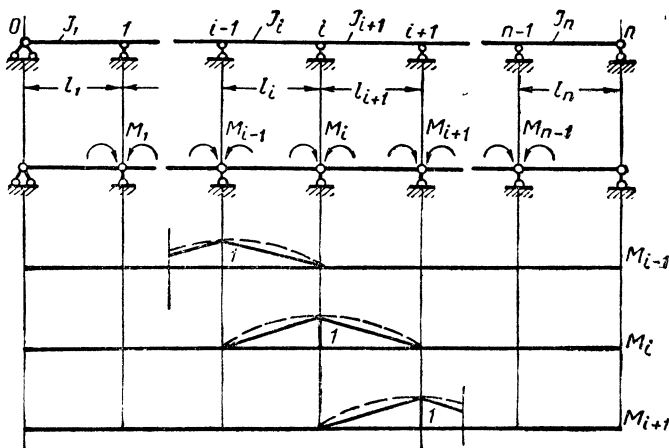


Рис. 70. Вывод уравнения трех моментов

ствием этого момента (рис. 71). Исходя из дифференциального уравнения изгиба

$$EIy'' + M = 0,$$

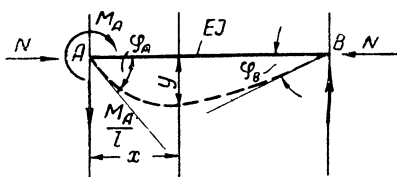


Рис. 71. Деформации шарнирно опертого стержня, вызванные опорным моментом

где в данном случае

$$M = M_A + Ny - \frac{M_A}{l} x,$$

получаем

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x - \frac{M_A}{N} \left(1 - \frac{x}{l} \right).$$

Здесь A , B — постоянные интегрирования; величина α определяется соотношением (21).

Из условий $y=0$ при $x=0$ и при $x=l$ находим значения постоянных

$$A = -\frac{M_A}{N} \cdot \frac{\cos u}{\sin u}; \quad B = \frac{M_A}{N};$$

следовательно:

$$y = \frac{M_A}{N} \left(-\frac{\cos u}{\sin u} \sin \alpha x + \cos \alpha x + \frac{x}{l} - 1 \right).$$

Дифференцируя по x , получаем уравнение углов поворота

$$y' = \frac{M_A}{N} \left(-\alpha \frac{\cos u}{\sin u} \cos \alpha x - \alpha \sin \alpha x + \frac{1}{l} \right).$$

Полагая теперь $y=0$ и $y=l$, получаем значения углов поворота на опорах:

$$\varphi_A = y'_A = \frac{M_A l}{EJ} \cdot \frac{1}{u^2} (1 - u \operatorname{ctg} u);$$

$$\varphi_B = y'_B = \frac{M_A l}{lJ} \cdot \frac{1}{u^2} \left(\frac{u}{\sin u} - 1 \right).$$

Положительным направлением углов поворота φ_A и φ_B принято такое их направление, при котором стержень обращен выпуклостью в сторону положительных ординат.

Введем теперь сокращенное обозначение для функций Н. Е. Жуковского:

$$\left. \begin{aligned} c(u) &= \frac{1}{u^2} (1 - u \operatorname{ctg} u); \\ s(u) &= \frac{1}{u^2} \left(\frac{u}{\sin u} - 1 \right), \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

тогда полученные выше выражения для углов поворота запишутся в форме

$$\varphi_A = \frac{M_A l}{EJ} c(u); \quad \varphi_B = \frac{M_A l}{EJ} s(u). \quad (26)$$

Легко убедиться, что полученный результат согласуется с данными табл. 19. Выражения для φ_A и φ_B представляют собой перемещения, которые могут быть вычислены путем интегрирования эпюр, возникающих в шарнирно опертой балке от воздействия опорных моментов.

Рассмотрим эпюры единичных состояний $M_{i-1}=1$, $M_i=1$, $M_{i+1}=1$, возникающие от воздействия опорных моментов на трех последовательных опорах балки. Вычисление перемещений дает

$$\begin{aligned} a_{i,i-1} &= \frac{l_i}{EJ_i} s(u_i); \\ a_{i,i} &= \frac{l_i}{EJ_i} c(u_i) + \frac{l_{i+1}}{EJ_{i+1}} c(u_{i+1}); \\ a_{i,i+1} &= \frac{l_{i+1}}{J_{i+1}} s(u_{i+1}). \end{aligned}$$

При $k < i-1$ и при $k > i+1$ все перемещения a_{ik} равны нулю. Поэтому i -е уравнение канонической системы метода сил имеет вид

$$M_{i-1} \frac{l_i}{EJ_i} s_i + M_i \left[\frac{l_i}{EJ_i} c_i + \frac{l_{i+1}}{EJ_{i+1}} c_{i+1} \right] + \\ + M_{i+1} \frac{l_{i+1}}{EJ_{i+1}} s_{i+1} = 0, \quad (27)$$

где принято для сокращения записи обозначение

$$c_i = c(u_i); \quad s_i = s(u_i).$$

Уравнение трех моментов (27) выражает в аналитической форме условие неразрывности деформаций на опоре i , т. е. равенство углов наклона касательных к упругой кривой справа и слева от опоры.

Число уравнений типа (27) соответствует числу лишних неизвестных для данной балки. Полученные канонические уравнения метода сил являются трехчленными. Критерий потери устойчивости заключается в равенстве нулю определителя этой системы.

В случае, когда жесткость стержня и сжимающая сила постоянны по всем пролетам, а длины всех пролетов одинаковы, уравнение трех моментов записывается в форме

$$M_{i-1} s + 2M_i c + M_{i+1} s = 0$$

или

$$M_{i-1} + 2rM_i + M_{i+1} = 0, \quad (28)$$

где

$$r = \frac{c(u)}{s(u)} = \frac{\tau \sin u - u \cos u}{u - \sin u}. \quad (29)$$

Уравнение трех моментов в форме (28) можно рассматривать как уравнение в конечных разностях второго порядка. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$M_i = C_1 \sin \omega i + C_2 \cos \omega i. \quad (30)$$

Подставляя значение M_i в уравнение (29), видим, что оно удовлетворяется, если

$$\cos \omega = -r. \quad (31)$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 следует принять во внимание условия закрепления на опорах O и n . Пусть неразрезная балка имеет в точке O заделку, а в точке n — шарнирно оперта (рис. 72), тогда граничные условия записываются в виде

$$M_0 c + M_1 s = 0; \quad M_n = 0.$$

Отсюда получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} C_1 \sin \omega &= 0; \\ C_1 \sin \omega n + C_2 \cos \omega n &= 0 \end{aligned}$$

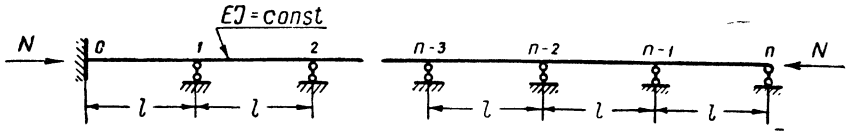


Рис. 72. Неразрезная балка с равными пролетами, постоянной жесткостью и постоянной сжимающей силой. Один конец защемлен, другой—оперт шарнирно

Критерий потери устойчивости найдем, приравняв нулю определитель этой системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin \omega & 0 \\ \sin \omega n & \cos \omega n \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая определитель, имеем

$$\sin \omega \cos \omega n = 0.$$

Легко убедиться, что корни, соответствующие уравнению $\sin \omega = 0$, не дают решения задачи. В самом деле, имеем $\omega = k\pi$ ($k=0, 1, 2, \dots$), следовательно, $\sin \omega i = 0$ при всех целых значениях i . Второе граничное условие может быть удовлетворено при этом только в случае $C_2 = 0$. Отсюда на основании (30) следует, что все опорные моменты равны нулю $M_i = 0$. Стержень находится в состоянии прямолинейного равновесия.

Приравнявая нулю второй множитель $\cos \omega n = 0$, находим

$$n\omega = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

следовательно:

$$\cos \omega = \cos \left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2n} \right).$$

Воспользовавшись соотношениями (31) и (29), получаем

$$\frac{\sin u - u \cos u}{u - \sin u} = -\cos \left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2n} \right).$$

Значение k должно быть выбрано так, чтобы величина u оказалась наименьшей. Этому условию удовлетворяет значение $k=n$. Принимая во внимание, что

$$\cos \left(\pi + \frac{\pi}{2n} \right) = -\cos \frac{\pi}{2n},$$

находим окончательно

$$\frac{\sin u - u \cos u}{u - \sin u} = \cos \frac{\pi}{2n} \quad (32)$$

Выведенная формула позволяет определить критическое значение аргумента для каждого заданного числа пролетов балки n . При $n=1$ критерий потери устойчивости (32) принимает вид

уравнения $\operatorname{tg} u = u$, откуда $u \approx 1,43\pi$, свободная длина $l_0 = 0,699l$ (см. первый пример предыдущего параграфа). По мере увеличения числа n пролетов величина u убывает, а свободная длина возрастает. При $n = \infty$ получаем $u = \pi$ и $l_0 = l$.

График функций Н. Е. Жуковского представлен на рис. 73.

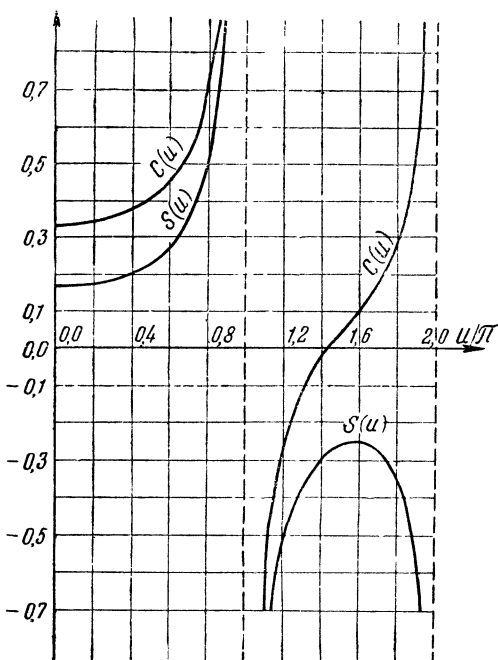


Рис. 73. График функций Н. Е. Жуковского $c(u)$ и $s(u)$

§ 46. МЕТОД ДЕФОРМАЦИИ

Исследование устойчивости рамных систем при помощи метода деформаций является весьма эффективным и дает возможность решить большое количество практически важных задач.

В качестве лишних неизвестных, в отличие от метода сил, принимаются не силы, а деформации, т. е. углы поворота φ и

сдвиги δ опорных сечений. Вводя дополнительные закрепления, препятствующие повороту опорных сечений или сдвигу, преобразуем заданную систему в основную систему. Расчетными уравнениями будут служить канонические уравнения, выражающие условия равенства нулю реакций во введенных дополнительных связях. Эти уравнения являются однородными; приравняв главный определитель нулю, получим искомый критерий устойчивости. Наименьший положительный корень уравнения $\Delta = 0$ определяет критическое состояние системы.

Порядок детерминанта Δ равен числу неизвестных. Отсюда вытекает критерий практической применимости метода деформаций; он оказывается особенно эффективным при исследовании

рам, обладающих высокой степенью статической неопределенности.

Необходимым этапом исследования является изучение реакций основной системы, т. е. реакций, возникающих в основной системе при воздействии единичных углов поворота φ и сдвигов δ . Условимся считать положительными реактивные опорные моменты, вращающие узел по направлению часовой стрелки.

Изучение реакций основной системы основывается на интегрировании дифференциального уравнения изгиба (3), которое сохраняет свою силу при любом способе опорных закреплений концов стержня. Это дифференциальное уравнение является однородным, но граничные условия задаются в неоднородной форме. Благодаря этому для постоянных интегрирования могут быть найдены вполне определенные, конечные и единственные значения.

Будем исходить из общего интеграла дифференциального уравнения изгиба в форме, получаемой при помощи метода начальных параметров:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 \frac{1 - \cos \alpha x}{\alpha^2} + C_4 \frac{\alpha x - \sin \alpha x}{\alpha^3}. \quad (33)$$

Эта форма представляет значительные преимущества с точки зрения простоты определения постоянных C_1, C_2, \dots . В самом деле, как было показано в главе второй, постоянная C_1 представляет собой прогиб при $x=0$, постоянная C_2 — угол поворота в той же точке, т. е. $C_1 = y(0)$, $C_2 = y'(0)$. Постоянная C_3 пропорциональна величине изгибающего момента при $x=0$, а постоянная C_4 — величине поперечной силы в той же точке. Поэтому из граничных условий при $x=0$ две из постоянных могут быть сразу определены; две другие постоянные находятся из граничных условий при $x=l$.

А. Стержень, защемленный двумя концами

1) Угол поворота $\varphi = 1$ (рис. 74, а).

Из условий $y(0)=0$ и $y'(0)=1$ имеем $C_1=0$ и $C_2=1$, следовательно:

$$y = x + C_3 \frac{1 - \cos \alpha x}{\alpha^2} + C_4 \frac{\alpha x - \sin \alpha x}{\alpha^3};$$

$$y' = 1 + C_3 \frac{\sin \alpha x}{\alpha} + C_4 \frac{1 - \cos \alpha x}{\alpha^2}.$$

Вторая пара граничных условий $y(l)=0$ и $y'(l)=0$ приводит к системе уравнений

$$y(l) = l + C_3 \frac{1 - \cos u}{\alpha^2} + C_4 \frac{u - \sin u}{\alpha^3} = 0;$$

$$y'(l) = 1 + C_3 \frac{\sin u}{\alpha} + C_4 \frac{1 - \cos u}{\alpha^2} = 0,$$

откуда находим C_3 и C_4 .

Выражения для опорных моментов записываются так:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{EJ}{l} \cdot \frac{u \sin u - u^2 \cos u}{2 - u \sin u - 2 \cos u} = \frac{EJ}{l} L_1(u); \\ M_2 &= \frac{EJ}{l} \cdot \frac{u^2 - u \sin u}{2 - u \sin u - 2 \cos u} = \frac{EJ}{l} L_2(u). \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

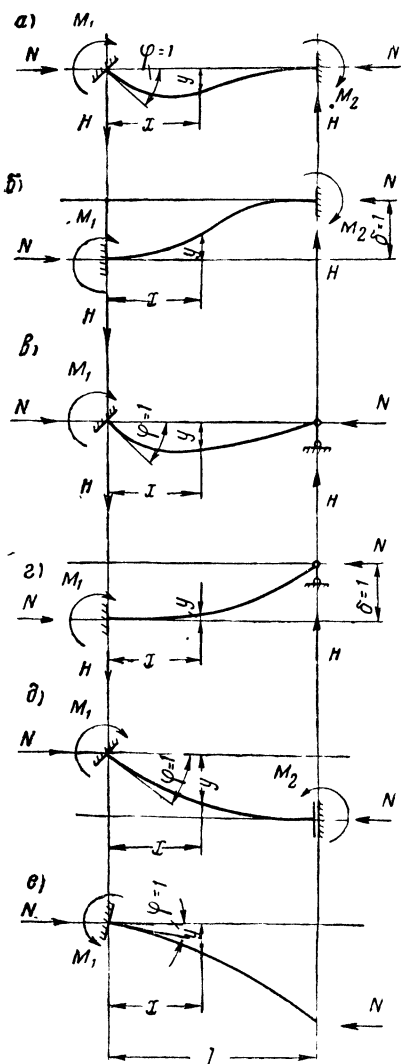


Рис. 74. Единичные деформации однопролетных стержней

Величина опорной реакции может быть найдена из условия равновесия

$$Hl = M_1 + M_2,$$

откуда

$$\begin{aligned} H &= \frac{EJ}{l^2} \cdot \frac{u^2 \sin u}{2 \sin u - u \cos u - u} = \\ &= \frac{EJ}{l^2} L_3(u). \end{aligned} \quad (35)$$

Здесь через $L_i(u)$ обозначены соответствующие функции аргумента u .

Заметим, что опорная реакция H совпадает по величине с поперечной силой Q только лишь на той опоре, где угол поворота равен нулю.

2) Смещение $\delta = 1$ (рис. 74, б).

Граничные условия $y(0) = 0$ и $y'(0) = 0$ приводят к выражению

$$\begin{aligned} y &= C_3 \frac{1 - \cos \alpha x}{\alpha^2} + \\ &+ C_4 \frac{\alpha x - \sin \alpha x}{\alpha^2}; \\ y' &= C_3 \frac{\sin \alpha x}{\alpha} + C_4 \frac{1 - \cos \alpha x}{\alpha^2} \end{aligned}$$

Из граничных условий на втором конце стержня

$$\begin{aligned} y(l) &= C_3 \frac{1 - \cos u}{\alpha^2} + \\ &+ C_4 \frac{u - \sin u}{\alpha^2} = 1; \end{aligned}$$

$$y'(l) = C_3 \frac{\sin u}{\alpha} + C_4 \frac{1 - \cos u}{\alpha^2} = 0,$$

находим C_3 и C_4 .

Далее определяем реактивные усилия

$$\left. \begin{aligned} M_1 = M_2 &= \frac{EJ}{l^2} \cdot \frac{u^2 \sin u}{2 \sin u - u \cos u - u} = \frac{EJ}{l^2} L_3(u); \\ H &= \frac{EJ}{l^3} \cdot \frac{u^3 + u^3 \cos u}{2 \sin u - u \cos u - u} = \frac{EJ}{l^3} L_4(u). \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Б. Стержень, одним концом защемленный и другим концом шарнирно опертый

3) Угол поворота $\varphi=1$ (рис. 74, в).

В этом случае $C_1=0$, $C_2=1$. Граничные условия на шарнирно опертом конце дают

$$y(l) = l + C_3 \frac{1 - \cos u}{\alpha^2} + C_4 \frac{u - \sin u}{\alpha^3} = 0;$$

$$y''(l) = C_3 \cos u + C_4 \frac{\sin u}{\alpha} = 0,$$

откуда, после определения C_3 и C_4 , находим реактивные усилия:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{EJ}{l} \cdot \frac{u^2 \sin u}{\sin u - u \cos u} = \frac{EJ}{l} L_5(u); \\ H &= \frac{EJ}{l^2} \cdot \frac{u^2 \sin u}{\sin u - u \cos u} = \frac{EJ}{l^2} L_5(u). \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

4) Смещение $\delta=1$ (рис. 74, г)

Имеем $C_1=0$, $C_2=0$. Граничные условия на другом конце стержня

$$y(l) = C_3 \frac{1 - \cos u}{\alpha^2} + C_4 \frac{u - \sin u}{\alpha^3} = 1;$$

$$y''(l) = C_3 \cos u + C_4 \frac{\sin u}{\alpha} = 0$$

дают возможность определить постоянные интегрирования C_3 и C_4 , после чего находим

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{EJ}{l^2} \cdot \frac{u^2 \sin u}{\sin u - u \cos u} = \frac{EJ}{l^2} L_5(u); \\ H &= \frac{EJ}{l^3} \cdot \frac{u^3 \cos u}{\sin u - u \cos u} = \frac{EJ}{l^3} L_6(u). \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

*В. Стержень, одним концом зашечмеленный
и на другом конце имеющий подвижное зашечмеление*

5) Угол поворота $\varphi = 1$ (рис. 74, д)

Из граничных условий $y(0)=0$ и $y'(0)=1$ следует, что $C_1=0$ и $C_2=1$. Имеем граничные условия на другом конце

$$y'(l) = 1 + C_3 \frac{\sin u}{\alpha} + C_4 \frac{1 - \cos u}{\alpha^2} = 0;$$

$$y'''(l) = -C_3 \alpha \sin u + C_4 \cos u = 0.$$

Отсюда после определения постоянных C_3 и C_4 находим опорные моменты

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{EJ}{l} \cdot \frac{u \cos u}{\sin u} = \frac{EJ}{l} L_7(u); \\ M_2 &= -\frac{EJ}{l} \cdot \frac{u}{\sin u} = -\frac{EJ}{l} L_8(u). \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Прогиб в точке $x=l$ равен

$$y(l) = l \frac{1 - \cos u}{u \sin u}.$$

Знак минус в выражении для M_2 показывает, что в данном случае момент направлен против часовой стрелки. В рассматриваемой задаче безразлично, к какой из опор — неподвижной или подвижной — приложить угол поворота $\varphi=1$.

Г. Консольный стержень

6) Угол поворота $\varphi = 1$ (рис. 74, е)

В этом случае использование общего интеграла в форме (33) приводит к некоторому усложнению граничных условий, поэтому проще исходить из дифференциального уравнения

$$EJy'' + Ny = 0,$$

общим интегралом которого является

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x.$$

Из граничных условий $y(0)=0$ и $y'(0)=1$ находим

$$A = \frac{1}{\alpha \cos u}; \quad B = 0.$$

Отсюда находится наибольший прогиб

$$y(l) = l \frac{\sin u}{u \cos u}$$

и изгибающий момент в заделке

$$M_1 = -\frac{EJ}{l} \cdot \frac{u \sin u}{\cos u} = -\frac{EJ}{l} L_9(u). \quad (40)$$

Функции $L_i(u)$ представляют собой обобщенные на случай действия продольной силы коэффициенты канонических уравнений метода деформаций, и выведенные для них формулы справедливы для всех действительных (отрицательных, нулевых или положительных) значений сжимающей силы N .

Рис. 75. Очертание графика $\Delta(u)$
(сплошная линия — метод сил, пунк-
тир — метод деформаций)

Тогда упомянутая система линейных и однородных канонических уравнений записывается в виде

[illegible]

$$r_{ik} = r_{ki}, \quad (42)$$

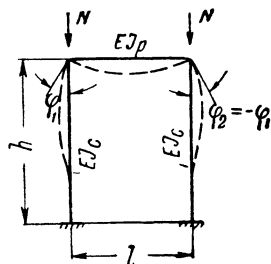
Критерий потери устойчивости заключается в равенстве нулю главного определителя системы (41)

$$\Delta = |r_{ik}| = 0. \quad (43)$$

16*

В качестве примера рассмотрим симметричную П-образную раму с заземленными в основании стойками, каждая из которых сжимается силой N (рис. 76). В силу симметрии системы потеря устойчивости произойдет при симметричной или антисимметричной форме изгиба. Исследование антисимметричной формы потери устойчивости было произведено в § 44 при помощи метода сил.

Рассмотрим теперь симметричную форму потери устойчивости, при которой рама не испытывает горизонтального смещения. Обозначая через φ_1 и φ_2 углы поворота узлов рамы, получаем при помощи табл. 19 уравнение



$$\left[\frac{FJ_c}{h} L_1(u) + 4 \frac{EJ_p}{l} \right] \varphi_1 + 2 \frac{EJ_p}{l} \varphi_2 = 0.$$

Заметим, что $\varphi_2 = -\varphi_1$, тогда каноническое уравнение примет вид

$$[L_1(u) + 2k] \varphi_1 = 0,$$

Рис. 76. Исследование устойчивости П-образной рамы при помощи метода деформаций (симметричная деформация)

где k определяется соотношением (23).

Критерий потери устойчивости записывается в форме

$$L_1(u) + 2k = 0. \quad (44)$$

При $k=0$ (шарнирное сопряжение стоек с ригелем) имеем $u_k \approx 1,43\pi$. Свободная длина стоек в этом случае

$$l_0 = \frac{\pi}{u_k} h = 0,699 h.$$

Другой предельный случай имеет место при бесконечно большой жесткости ригеля $EJ_p = \infty$, следовательно, $k = \infty$. В этом случае $u_k = 2\pi$ и свободная длина стоек равна $l_0 = \frac{\pi}{u_k} h = 0,5h$.

Помимо определения критической величины аргумента, метод деформаций дает также возможность разыскать форму изгиба в момент потери устойчивости.

Особенность метода деформаций по сравнению с методом сил при исследовании устойчивости рамных систем заключается главным образом в простоте основной системы. Это обстоятельство существенно облегчает изучение основной системы метода деформаций и дает возможность выразить реакции этой системы при помощи небольшого числа функций $L_i(u)$. Наоборот, вычисление перемещений в основной системе метода сил, представляющей собой хотя и статически определимую, но сложную совокупность стержней, является задачей весьма трудной.

Разработка метода деформаций в применении к решению задачи устойчивости рамных систем является заслугой совет-

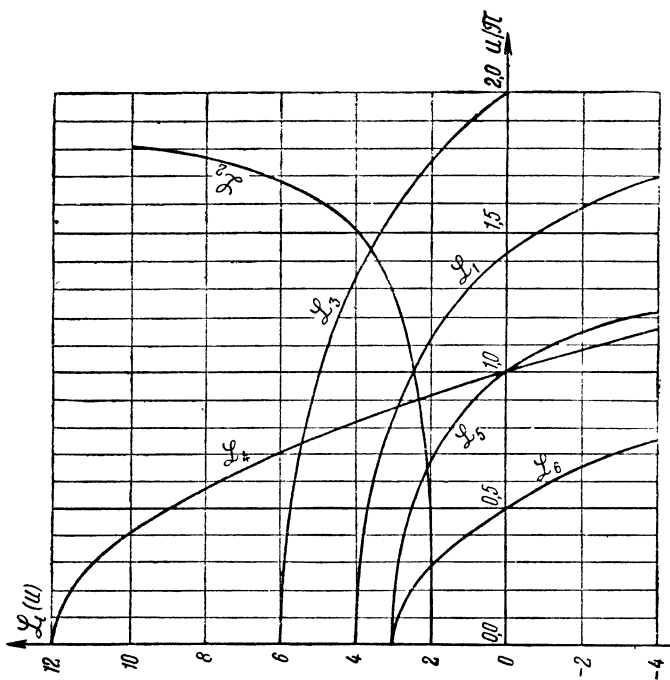


Рис. 77. Графики первых шести функций $L_i(u)$

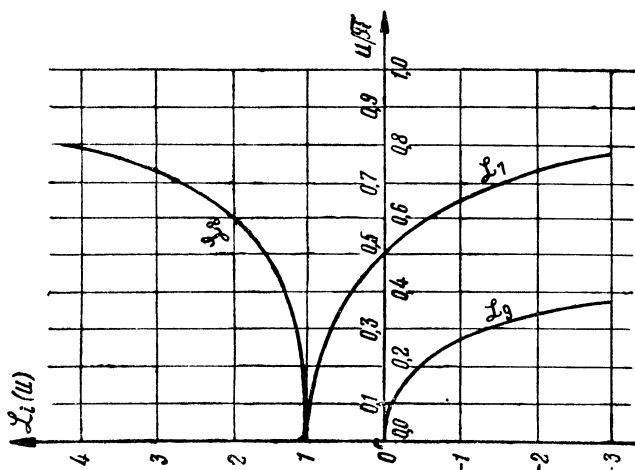


Рис. 78. Графики функций $L_7(u)$, $L_8(u)$ и $L_9(u)$

ских исследователей А. А. Белоуса¹, Н. В. Корноухова² и С. Д. Лейтеса³.

Графики функций $L_i(u)$, представляющих реакции основной системы, даны на рис. 77 и 78. Таблицы реакций основной системы метода деформаций имеются в трудах Н. В. Корноухова⁴ и А. Ф. Смирнова⁵.

Подобно методу сил и методу деформаций могут быть обобщены на случай действия сжимающей силы все другие методы расчета статически неопределимых систем: смешанный метод, метод фокальных отношений (моментных и угловых) и пр.

§ 47. ТЕХНИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ

При помощи одного из рассмотренных выше общих методов исследование устойчивости статически неопределимой системы сводится к разысканию наименьшего положительного корня уравнения

$$\Delta(u) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0; \quad (45)$$

элементы a_{ik} определителя представляют собой в общем случае трансцендентные функции аргумента u , поэтому критерий потери устойчивости (45) является также трансцендентным уравнением. Разыскание корней возможно в общем случае только лишь посредством численных методов и требует при высоком порядке определителя значительной затраты труда.

Свободная длина для каждого из сжатых стержней системы определяется по формуле

$$l_0 = \beta l, \quad (46)$$

где коэффициент свободной длины β обратно пропорционален критическому значению аргумента для данного стержня

$$\beta = \frac{\pi}{u_k}. \quad (47)$$

Все встречающиеся на практике задачи исследования устойчивости статически неопределимых систем могут быть разбиты

¹ А. А. Белоус, Устойчивость овальных и рамных шпангоутов, «Труды ЦАГИ», вып. 334, М. 1937.

² Н. В. Корноухов, Точный метод проверки устойчивости плоских рам, «Вестник инженеров и техников» № 3, 1937.

³ С. Д. Лейтес, Общий метод определения эйлеровой критической силы для сжатых стержней рамных конструкций, «Проект и стандарт» № 7, 1937.

⁴ Н. В. Корноухов, Прочность и устойчивость стержневых систем, Госстройиздат, 1949.

⁵ А. Ф. Смирнов, Статическая и динамическая устойчивость сооружений, Трансжелдориздат, 1947.

на два основных класса. К первому классу относятся *частные задачи, изучающие конкретную статически неопределимую систему при заданных в численной форме геометрических размерах, соотношениях жесткостей и сжимающих сил в элементах системы*. В этом случае аргументы всех сжатых стержней системы могут быть выражены через один какой-либо из них; назовем его u . Критерий потери устойчивости (45) не содержит ни одной буквенной величины, кроме аргумента u . Решением уравнения (45) является число u_k .

Второй класс *типовых задач* содержит задачи, отличающиеся в большей или меньшей мере общностью. Каждая из задач этого класса изучает систему, геометрическая схема которой, соотношения жесткостей и сжимающих сил полностью или частично определяются при помощи одного или нескольких параметров.

Так, выше мы рассматривали устойчивость П-образной рамы, для которой таким параметром является отношение погонных жесткостей ригеля и стойки

$$k = \frac{J_p h}{J_c l}. \quad (48)$$

Критерий потери устойчивости содержит, помимо аргумента u , также и этот параметр. Полученное решение охватывает целый комплекс индивидуальных задач, каждая из которых получается при частном численном значении параметра k . Полное решение задачи предполагает получение функциональной зависимости

$$u_k = f(k) \quad (49)$$

между параметром k и критическим значением аргумента u_k . Отсюда также и коэффициент свободной длины β может рассматриваться как функция параметра k

$$\beta = g(k). \quad (50)$$

Разумеется, необязательно предполагать получение функциональных зависимостей (49) и (50) в аналитической форме, т. е. в виде формул. Функции $u_k = f(k)$ и $\beta = g(k)$ могут быть получены в виде таблиц или же в графической форме. Получение решения в аналитической форме возможно только лишь в простейших случаях и приводит к довольно сложным формулам; наоборот, решение, дающее зависимость (49) и (50) в виде таблицы или графика, всегда возможно и дает достаточную для целей практики точность при простоте и удобстве пользования. При помощи такой таблицы или графика легко получается решение любой индивидуальной задачи данного типа. Для этого достаточно определить значение u_k или β соответствующее значению k , которое характеризует эту индивидуальную задачу.

Рассмотрим несколько подробнее технику вычисления для различных типов задач устойчивости.

Частная задача. Решение частной задачи, как было выше указано, сводится к разысканию наименьшего положительного корня уравнения (45), причем элементы определителя не содержат других переменных, кроме аргумента u .

Возможны два пути решения. Первый путь предполагает развертывание определителя (45). Критерий потери устойчивости принимает вид

$$F(u) = 0. \quad (51)$$

Наименьший положительный корень этого уравнения u_k дает решение задачи. Разыскание этого корня производится путем построения графика функции $F(u)$.

В том случае, когда развертывание определителя (45) в общем виде затруднительно, возможно непосредственное построение графика $\Delta(u)$. В этом заключается второй путь решения. Задавая некоторым числовым значением u_1 , вычисляем $\Delta(u_1)$ и т. д., пока не получим возможность при помощи найденных точек разыскать корень u_k с требуемой степенью точности.

Типовые задачи. Один аргумент, один параметр. Критерий потери устойчивости имеет вид

$$F(u, k) = 0. \quad (52)$$

Как уже указывалось, разыскание аналитической зависимости в форме (48) или (49) весьма затруднительно, но в большинстве случаев легко находится обратная зависимость

$$k = \varphi(u_k) \quad (53)$$

или

$$k = \psi(\beta). \quad (54)$$

Здесь возможны следующие частные случаи.

Случай 1. Уравнение (52) может быть разрешено в явной форме относительно k . Решение получается в форме (53) или (54). Задавая рядом значений u и вычисляя соответствующие значения k , можно построить график зависимости $k = \varphi(u_k)$, который можно трактовать также как график обратной функции $u_k = f(k)$. При определении свободной длины элемента рамной системы задача ставится так: дано значение параметра k , требуется найти соответствующее значение коэффициента свободной длины β . Поэтому результат решения целесообразно изобразить в виде графика, на котором по оси абсцисс отложены значения k и по оси ординат — значения β .

Случай 2. Критерий потери устойчивости (52) может быть представлен в виде уравнения степени m относительно параметра k :

$$\Phi(k) = C_m k^m + C_{m-1} k^{m-1} + \dots + C_1 k + C_0 = 0, \quad (55)$$

коэффициенты которого C_i являются функциями аргумента u . Задавая некоторым значением u , вычисляем коэффициенты C_i и, решая уравнение, находим соответствующее значение параметра k . Таким образом, могут быть построены зависимости (54) и график $\beta = g(k)$.

Из смысла задачи может быть установлено, который из корней уравнения должен быть принят во внимание.

Случай 3. Уравнение (52) не может быть разрешено относительно k и не может быть представлено в виде (55). Функция $F(u, k)$ в этом случае трансцендентна относительно как u , так и k . Численное решение уравнения (52) может быть получено следующим путем. Задаем некоторым значением u и подставляем его в левую часть уравнения (52). Получается уравнение

$$F_1(k) = 0,$$

где F_1 — некоторая трансцендентная функция.

Разыскав корень этого уравнения, получаем пару соответствующих значений u и k . Повторяя этот прием, имеем возможность построить график $\beta = g(k)$ по полученным точкам.

Один аргумент, два параметра. Критерий потери устойчивости имеет вид

$$F(u, k, n) = 0, \quad (56)$$

где u — аргумент;
 k и n — параметры.

Следует стремиться получить аналитическую зависимость в одной из форм:

$$k = f(u_k, n) \text{ или } n = g(u_k, k), \quad (57)$$

Если эта цель достигнута, то, принимая фиксированное значение u_k , получаем зависимость

$$k = f_1(n) \text{ или } n = g_1(k),$$

которая на графике изобразится некоторой кривой. Семейство кривых, каждая из которых соответствует определенному значению u_k и, следовательно, определенному значению коэффициента свободной длины β , дает решение поставленной задачи.

Кривые, соответствующие постоянному значению коэффициента свободной длины β , называют *изостабами*¹. Здесь возможны следующие случаи.

Случай 4. Уравнение (56) разрешается непосредственно в форме (57). В этом случае построение изостаб не встречает затруднений.

Случай 5. Уравнение (56) может быть представлено в форме (55), где коэффициенты C_i являются функциями u и n . Задаваясь фиксированным значением u , имеем возможность каждому значению n поставить в соответствие путем разыскания корня уравнения (55) некоторое значение k . Таким путем получаем изостабу. Задаваясь новым фиксированным значением u и повторяя вычисления, имеем возможность построить вторую изостабу и т. д.

Случай 6. Уравнение (56) трансцендентно относительно u , k и n . В этом случае решение возможно только лишь путем подбора корней.

Один аргумент, более двух параметров. Критерий потери устойчивости имеет вид

$$F(u; k_1, k_2, k_3, \dots) = 0.$$

Решение не может быть представлено одним графиком или одной таблицей.

Случай 7. Если число параметров равно трем, то, придавая одному из параметров постоянное значение, приводим задачу к одному из случаев 4, 5 или 6. Для данного значения параметра получаем график, содержащий семейство изостаб. Решение задачи представляется совокупностью графиков.

Два аргумента, один параметр. После исключения второго аргумента критерий потери устойчивости принимает вид (56). Задача большей частью сводится к случаю 3.

Несколько аргументов, несколько параметров. В этом случае вычисления становятся весьма громоздкими, однако главная трудность заключается в том, что решение не может быть представлено в компактной форме. В этом случае типовая задача теряет практический смысл. Однако решение всегда возможно, так как всякая сложная типовая задача может быть сведена к совокупности большого числа частных задач.

¹ В работе 1938 г. автор применял термин *изобэты* («Шесть задач на устойчивость статически неопределимых систем», «Строительная промышленность», 1938). Термин *изостабы* введен А. Р. Ржаницыным, «Строительная промышленность» № 11, 1939.

УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

§ 48. СТЕРЖЕНЬ С КОНСОЛЬЮ. СТЕРЖЕНЬ С УПРУГИМИ ЗАКРЕПЛЕНИЯМИ. ПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ РАСКОСЫ

Настоящая глава содержит решение ряда типовых задач устойчивости. При решении используются общие методы, изложенные в главе седьмой. Результаты решения представлены в форме, допускающей непосредственное применение на практике.

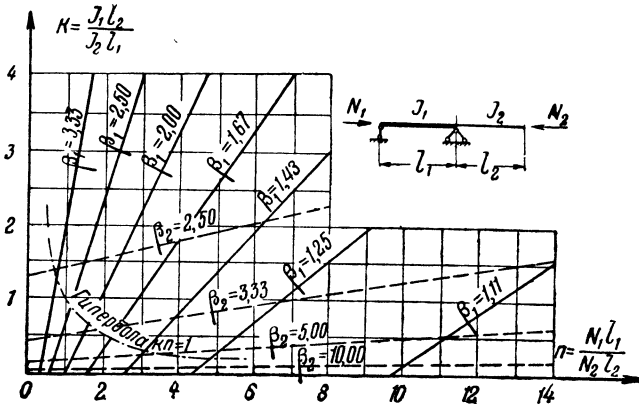


Рис. 79. Изостабы для шарнирно опертого стержня с консолью (задача 1)

Задача 1. Шарнирно опертый стержень с консолью (рис. 79). Каноническое уравнение метода деформаций имеет вид

$$\left[\frac{EJ_1}{l_1} L_5(u_1) - \frac{EJ_2}{l_2} L_3(u_2) \right] \varphi_1 = 0,$$

где аргументы

$$u_1 = \sqrt{\frac{N_1}{EJ_1}} l_1, \quad u_2 = \sqrt{\frac{N_2}{EJ_2}} l_2.$$

Обозначая

$$k = \frac{J_1 l_2}{J_2 l_1}, \quad (1)$$

получим критерий потери устойчивости в виде

$$kL_5(u_1) = L_9(u_2). \quad (2)$$

Аргументы связаны зависимостью

$$u_2 = \sqrt{\frac{k}{n}} u_1, \quad (3)$$

где

$$n = \frac{N_1 l_1}{N_2 l_2}. \quad (4)$$

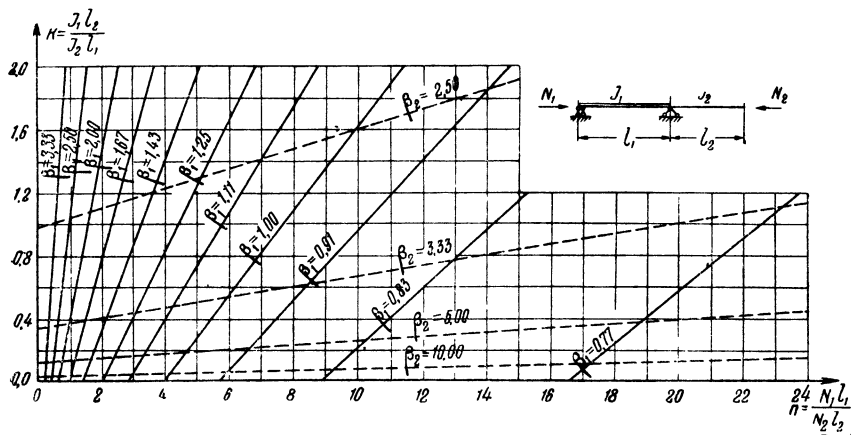


Рис. 80. Изостабь для защемленного стержня с консолью (задача 2)

Для построения изостаб поступаем так. Соотношение (2) приведем к виду

$$k = \frac{L_9(u_2)}{L_5(u_1)}, \quad (5)$$

а соотношение (3) — к виду

$$n = k \left(\frac{u_1}{u_2} \right)^2. \quad (6)$$

Задаваясь парой значений u_1 и u_2 , находим по формуле (5) величину k и затем по формуле (6) величину n .

Рис. 79 дает возможность определить коэффициент свободной длины для стержня между опорами β_1 и для консольной части β_2 в зависимости от параметров задачи n и k .

Задача 2. Защемленный стержень с консолью (рис. 80). Критерий потери устойчивости

$$kL_1(u_1) = L_9(u_2). \quad (7)$$

Обозначения (1), (4) и ход расчета, как в задаче 1.

Задача 3. Симметричный стержень с двумя консолями (рис. 81). Канонические уравнения метода деформаций

$$\left[\frac{J_1}{l_1} L_1(u_1) - \frac{J_2}{l_2} L_9(u_2) \right] \varphi_1 + \frac{J_1}{l_1} L_2(u_1) \varphi_2 = 0;$$

$$\frac{J_1}{l_1} L_2(u_1) \varphi_1 + \left[\frac{J_1}{l_1} L_1(u_1) - \frac{J_2}{l_2} L_9(u_2) \right] \varphi_2 = 0.$$

При симметричной деформации системы $\varphi_2 = -\varphi_1$; при антисимметричной деформации $\varphi_2 = \varphi_1$. Решающей является симметричная деформация. Обозначая

$$k = \frac{J_1 l_2}{J_2 l_1}; \quad n = \frac{N_1 l_1}{N_2 l_2}, \quad (8)$$

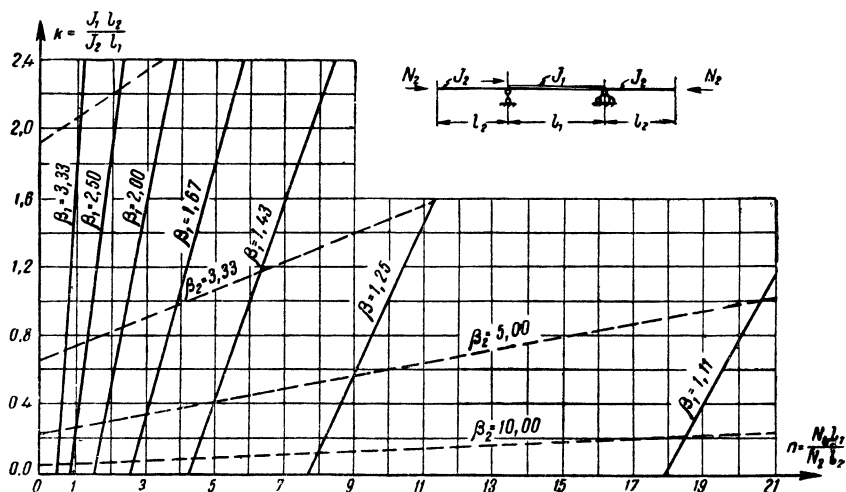


Рис. 81. Изостабь для симметричного стержня с двумя консолями (задача 3)

получаем критерий потери устойчивости в виде

$$k = \frac{L_9(u_2)}{L_1(u_1) - L_2(u_2)}. \quad (9)$$

Аргументы u_1 и u_2 удовлетворяют соотношению (3).

Задача 4. Стержень, шарнирно опертый нижним концом, верхним концом упруго защемлен и упруго оперт (рис. 82). Этот стержень по устойчивости эквивалентен стержню, одним концом упруго защемленному и другим концом упруго опертому.

Упругая опора характеризуется линейной зависимостью между перемещением (сдвигом, осадкой) опоры δ и развивающимся в опоре усилием H :

$$H = \gamma \delta. \quad (10)$$

Коэффициент упругости γ представляет собой усилие, соответствующее единичному перемещению ($\delta = 1$); размерность этого коэффициента $\frac{\text{сила}}{\text{длина}}$.

Если $\gamma = \infty$, то мы имеем дело с абсолютно жесткой опорой, для которой

всегда $\delta=0$. Наоборот, при $\nu=0$ опора становится бесконечно слабой, т. е. опоры вообще не существует. Упругую опору на чертежах будем изображать в виде пружинки.

Упругая заделка (или упругое защемление) представляет собой второй тип упругого закрепления. Здесь мы имеем линейную зависимость между углом поворота заделки φ и развивающимся в заделке моментом

$$M = \mu \varphi. \quad (11)$$

Коэффициент упругости μ имеет размерность момента (сила \times длина) и представляет собой изгибающий момент, соответствующий единичному уг-

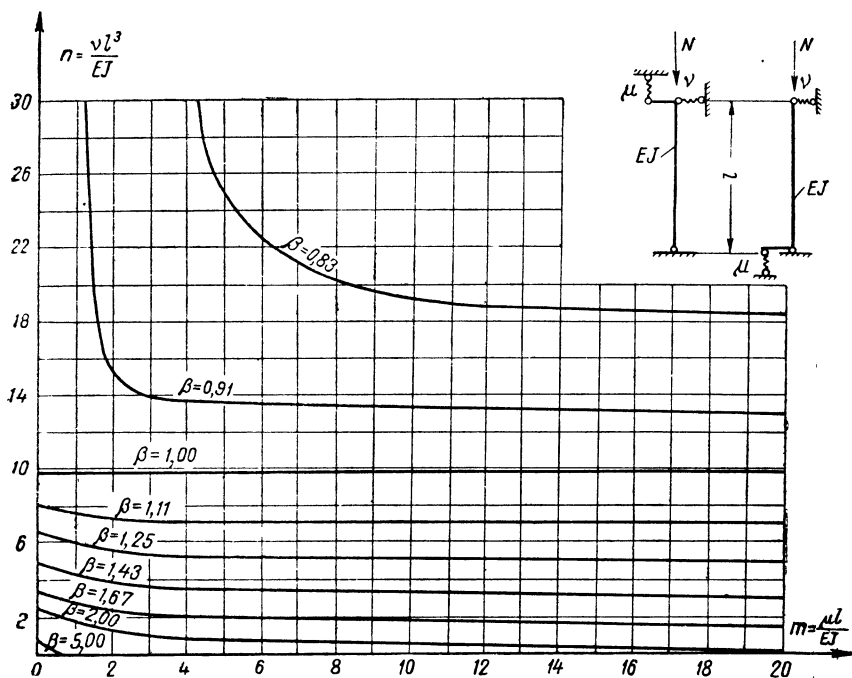


Рис. 82. Изостабь для упруго защемленного и упруго опертого стержня (задача 4)

лу поворота ($\varphi=1$). При $\mu = \infty$ имеем абсолютно жесткую заделку, для которой $\varphi=0$. Наоборот, при $\mu=0$ заделка становится бесконечно слабой, т. е. отсутствует.

Механизм упругой заделки предполагается таким, что обеспечивает возможность беспрепятственных линейных перемещений. Подобное устройство изображено на рис. 83, а и б. Для его осуществления необходимы четыре стерженька (один из них упругий) и жесткий диск. Такая конструкция обеспечивает подвижность как вдоль стержня, так и в перпендикулярном направлении. Во избежание усложнения чертежа будем пользоваться для упругой заделки условным изображением по рис. 83, в.

Исследование устойчивости упруго опертого стержня произведем при помощи метода деформаций. Основную систему образуем, вводя на верхнем конце закрепления, препятствующие как повороту, так и сдвигу. Лишние не-

известные: угол поворота φ и сдвиг δ . Расчетные уравнения метода деформаций имеют вид

$$\left(\frac{EJ}{l} L_5 + \mu \right) \varphi + \frac{EJ}{l^2} L_5 \delta = 0;$$

$$\frac{EJ}{l^2} L_5 \varphi + \left(\frac{EJ}{l^3} L_6 + \nu \right) \delta = 0.$$

Условимся пропускать обозначения аргумента, т. е. будем писать, например, L_5 вместо $L_5(u)$.

Введем параметры нулевой размерности:

$$m = \frac{\mu l}{LJ}; \quad n = \frac{\nu l^3}{EJ}, \quad (12)$$

тогда критерий потери устойчивости записывается в виде

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_5 + m & L_5 \\ L_5 & L_6 + n \end{vmatrix} = 0$$

или

$$mn + mL_6 + nL_5 - L_5 u^2 = 0. \quad (13)$$

Здесь использовано тождественное соотношение $L_5 - L_6 = u^2$.

Разрешая зависимость (13) относительно одного из параметров, например m , получаем уравнение изостабы (рис. 82).

$$m = L_5 \frac{u^2 - n}{L_6 + n}. \quad (14)$$

Задача 5 (частный случай задачи 4). Шарнирно опертый одним концом стержень имеет на другом конце упругую опору (рис. 84, а). Полагая в уравнении (14) $m=0$, находим $u^2=n$, откуда следует, что величина критической силы

$$N_k = \nu l \quad (15)$$

не зависит от жесткости стержня. Потеря устойчивости не сопровождается изгибом стержня (рис. 84, б).

Этот же самый результат может быть получен из условий статического равновесия (ср. рассмотренную в главе первой, § 1, модель упругой потери устойчивости).

Возможна, однако, и другая форма потери устойчивости, при которой упругая опора не испытывает смещения, но стержень изгибается по полуволне синусоиды (рис. 84, в). Критическая сила в этом случае равна эйлеровой

$$N_k = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

и не зависит от податливости упругой опоры.

Стержень следует рассчитывать, исходя из свободной длины $l_0=l$, и проверять коэффициент запаса на устойчивость по формуле

$$\eta = \frac{\nu l}{N},$$

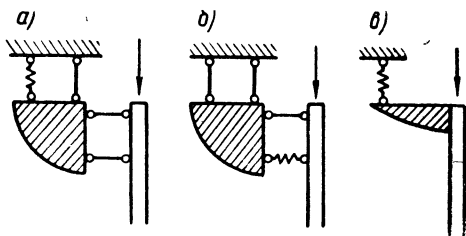


Рис. 83. Конструкция упругого защемления

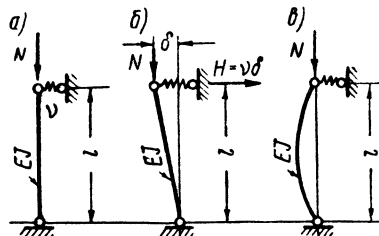


Рис. 84. Упруго опертый стержень (задача 5)

где N — фактическое значение сжимающей силы.

Данный случай по своим особенностям несколько выпадает из круга рассматриваемых задач.

Задача 6. Защемленный нижним концом стержень верхним концом упруго защемлен и упруго оперт (рис. 85).

Пусть будут μ и ν — соответствующие коэффициенты упругости опор.

Исходя из канонических уравнений метода деформаций

$$\left(\frac{EJ}{l} L_1 + \mu \right) \varphi + \frac{EJ}{l^2} L_3 \delta = 0;$$

$$\frac{EJ}{l^2} L_3 \varphi + \left(\frac{EJ}{l^3} L_4 + \nu \right) \delta = 0$$

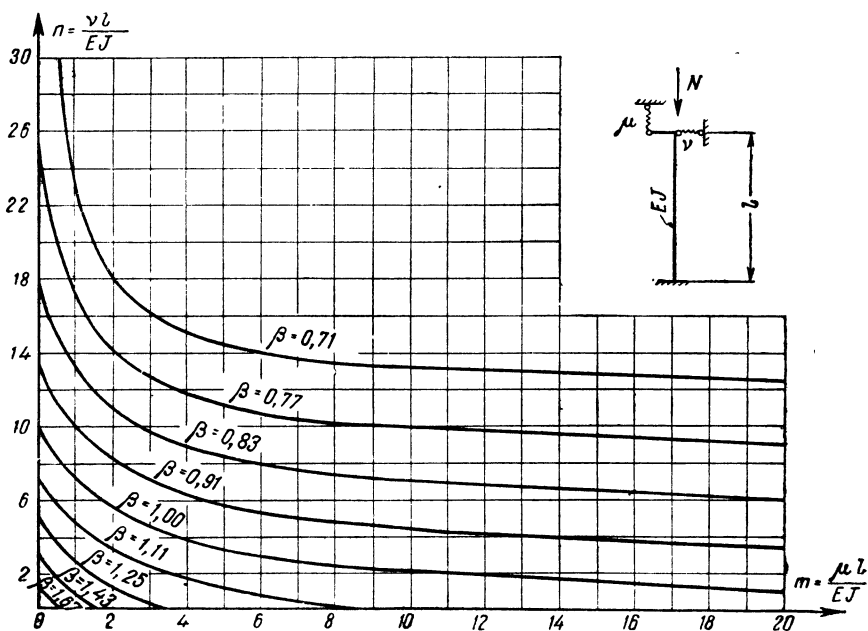


Рис. 85. Изостабь для упруго защемленного и упруго опертого стержня (задача 6)

и вводя параметры m и n по формулам (12), получаем критерий потери устойчивости

$$\begin{vmatrix} L_1 + m & L_3 \\ L_3 & L_4 + n \end{vmatrix} = 0,$$

откуда после преобразований находим

$$mn + mL_4 + nL_1 + L_1 L_4 = 0. \quad (16)$$

Для построения изостаб (рис. 85) приводим уравнение к виду

$$m = -L_1 \frac{n + L_4}{n + L_1}. \quad (17)$$

Задача 7. Стержень, упруго защемленный двумя концами (рис. 86). Обозначим через μ_1 и μ_2 коэффициенты упругости заделки. Канонические уравнения метода деформаций имеют вид

$$\left(\frac{EJ}{l} L_1 + \mu_1 \right) \varphi_1 + \frac{EJ}{l} L_2 \varphi_2 = 0;$$

$$\frac{EJ}{l} L_2 \varphi_1 + \left(\frac{EJ}{l} L_1 + \mu_2 \right) \varphi_2 = 0.$$

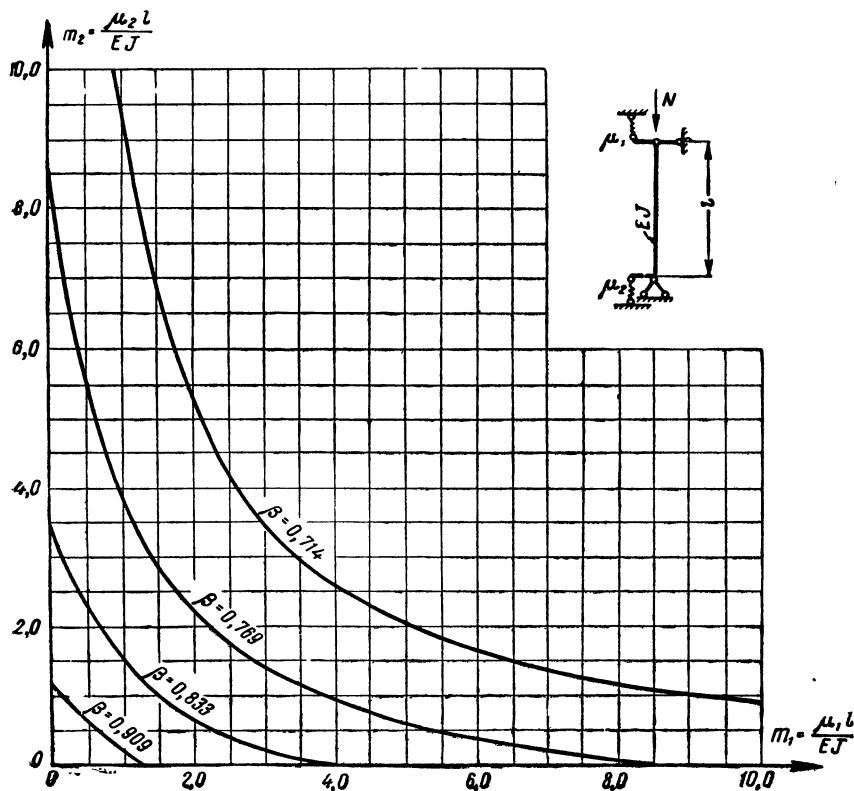


Рис. 86. Изостаты для упруго защемленного двумя концами стержня (задача 7)

Вводя в рассмотрение параметры нулевой размерности

$$m_1 = \frac{\mu_1 l}{EJ}; \quad m_2 = \frac{\mu_2 l}{EJ}, \quad (18)$$

получаем критерий потери устойчивости

$$\begin{vmatrix} L_1 + m_1 & L_2 \\ L_2 & L_1 + m_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель и используя соотношение

$$L_1^2 - L_2^2 = L_1 L_5,$$

получаем

$$m_1 m_2 + L_1 (m_1 + m_2) + L_1 L_7 = 0. \quad (19)$$

Уравнение разрешается относительно одного из параметров:

$$m_2 = -L_1 \frac{L_7 + m_1}{L_1 + m_1}. \quad (20)$$

Задача 8. Упруго защемленный двумя концами стержень; одна из опор имеет возможность свободного перемещения в направлении, перпендикулярном оси стержня (рис. 87).

Критерий потери устойчивости при обозначениях задачи 7 имеет вид

$$\begin{vmatrix} L_7 + m_1 & -L_8 \\ -L_8 & L_7 + m_2 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$m_1 m_2 + L_7 (m_1 + m_2) - u^2 = 0. \quad (21)$$

Здесь использовано соотношение $L_7^2 - L_8^2 = -u^2$.

Разрешая уравнение (21) относительно одного из параметров, например, m_2 , имеем

$$m_2 = \frac{u^2 - L_7 m_1}{m_1 + L_7}. \quad (22)$$

Задача 9. Шарнирно опертый двумя концами стержень имеет в пролете дополнительную упругую опору (рис. 88). В данном случае решение наиболее просто получается путем использования метода сил. Основную систему образуем, отделяя упругий опорный стержень от балки. За лишнее неизвестное примем усилие в этом стерженьке X_1 . Рассмотрим единичное состояние $X_1=1$. Единственное подлежащее вычислению перемещение a_{11} представляет собой расхождение между упругим стерженьком и балкой под влиянием усилия $X_1=1$, приложенного к основной системе. Пусть будет l — пролет балки, EJ — жесткость, a — расстояние от упругой опоры до ближайшей жесткой опоры. Тогда на основании результатов предыдущих глав прогиб шарнирно опертой балки под грузом $P=1$, приложенным в точке $x=a$, выразится так:

$$\frac{1}{\alpha N} \left[\frac{\sin \alpha a \sin \alpha (l-a)}{\sin \alpha l} - \frac{l-a}{l} \alpha a \right],$$

где $\alpha = \sqrt{\frac{N}{EJ}}$. Вводя аргумент $u = \alpha l$ и обозначая

$$k = \frac{a}{l}, \quad (23)$$

находим полное перемещение

$$a_{11} = \frac{l^3}{u^3 EJ} \left[\frac{\sin ku \sin (1-k) u}{\sin u} - k(1-k) u \right] + \frac{1}{\nu}.$$

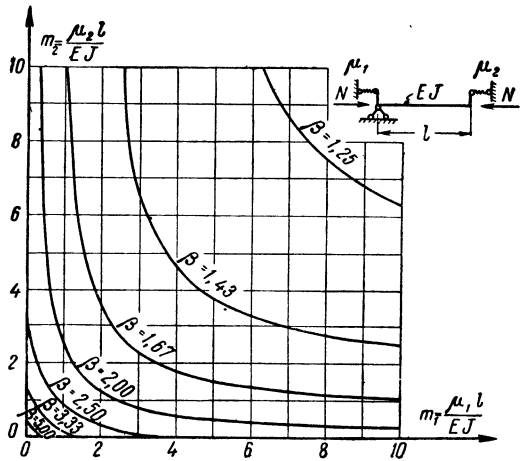


Рис. 87. Изоастабы для упруго защемленного двумя концами стержня (задача 8)

Каноническое уравнение имеет вид

$$X_1 a_{11} = 0,$$

откуда критерий потери устойчивости

$$\frac{l^3}{u^3 EJ} \left[\frac{\sin ku \sin (1-k) u}{\sin u} - k(1-k)u \right] + \frac{1}{v} = 0.$$

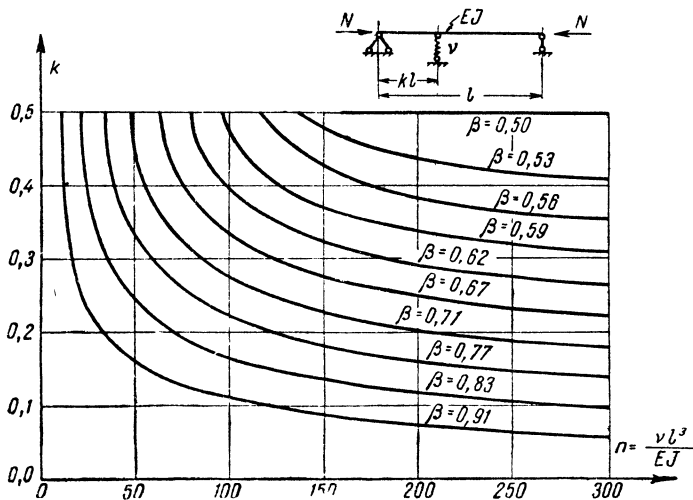


Рис. 88. Изостаты для шарнирно опертого стержня с дополнительной упругой опорой (задача 9)

Вводим далее параметр n по второй из формул (12) и разрешаем полученное уравнение относительно этого параметра:

$$n = \frac{u^3}{k(1-k)u - \frac{\sin ku \sin (1-k) u}{\sin u}}. \quad (24)$$

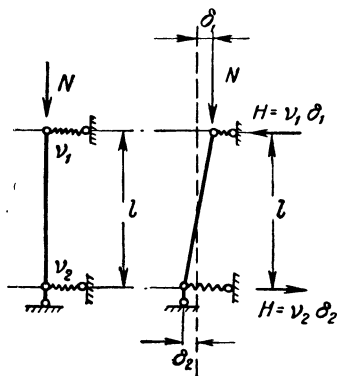


Рис. 89. Упруго опертый двумя концами стержень (задача 10)

Задача 10. Упруго опертый двумя концами стержень (рис. 89). Очевидно, что возможны две независимые формы потери устойчивости. Первая форма потери устойчивости характеризуется смещением упруго опертых концов стержня, сам же стержень сохраняет свою прямолинейную ось, т. е. не испытывает изгиба. Пусть будут v_1 и v_2 — коэффициенты упругости опор, δ_1 и δ_2 — соответствующие смещения. В момент потери устойчивости условие равновесия имеет вид

$$N(\delta_1 + \delta_2) - Hl = 0,$$

где H — горизонтальная реакция, одинаковая для каждой из упругих опор. Далее

имеем $\delta_1 = \frac{H}{\nu_1}$ и $\delta_2 = \frac{H}{\nu_2}$, следовательно:

$$H \left\{ N \left(\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} \right) - l \right\} = 0,$$

откуда критерий потери устойчивости

$$N \left(\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} \right) - l = 0.$$

Величина критической силы определяется формулой

$$N_K = \frac{\nu_1 \nu_2}{\nu_1 + \nu_2} l. \quad (25)$$

Вторая форма потери устойчивости характеризуется изгибом стержня по популовне синусоиды и имеет место при эйлеровом значении критической силы.

Стержень следует рассчитывать, исходя из свободной длины $l_0=l$, и проверять коэффициент запаса на устойчивость, не зависящий от жесткости стержня

$$\eta = \frac{N_K}{N},$$

где N_K — критическая сила по формуле (25);

N — фактическое значение сжимающей силы.

В случае равных коэффициентов упругости $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ формула (25) принимает вид

$$N_K = \frac{\nu l}{2}, \quad (26)$$

следовательно, величины критической силы вдвое меньше, чем в случае одной упругой опоры (задача 5).

Задача 11. Два стержня пересекают друг друга в середине своей длины. Исследуем устойчивость системы при выпучивании стержней из их плоскости. Эта задача имеет практическое значение при расчете пересекающихся раскосов ферм (рис. 90) в том случае, когда проверяется возможность выпучивания из плоскости фермы. Один из раскосов будем предполагать сжатым силой N , другой раскос (назовем его поддерживающим) может быть сжатым, растянутым или совсем не нагруженным. Обозначаем через N' усилие в поддерживающем раскосе. Пусть будут J и J' — моменты инерции соответственно рассматриваемого и поддерживающего раскоса при изгибе из плоскости фермы, $l=2a$ — длина каждого из стержней.

Возможны антисимметричная (рис. 91,а) и симметричная (рис. 91,б) формы потери устойчивости. При антисимметричной форме потери устойчивости точка пересечения раскоса остается неподвижной, свободная длина рассматриваемого стержня равна

$$l_0 = 0,5 l.$$

Такого рода деформация возможна при любой жесткости поддерживающего раскоса, поэтому значение $\beta = 0,5$ следует рассматривать как нижнюю границу для коэффициента свободной длины.

Симметричная форма потери устойчивости характеризуется перемещением δ точки пересечения раскосов из плоскости фермы. Введем аргументы для рассматриваемого и поддерживающегося раскосов:

$$u = \sqrt{\frac{N}{EJ}} a; \quad u' = \sqrt{\frac{N'}{EJ'}} a,$$

тогда каноническое уравнение метода деформаций запишется в виде

$$\left[\frac{EJ}{a^3} L_6(u) + \frac{EJ'}{a^3} L_6(u') \right] \delta = 0.$$

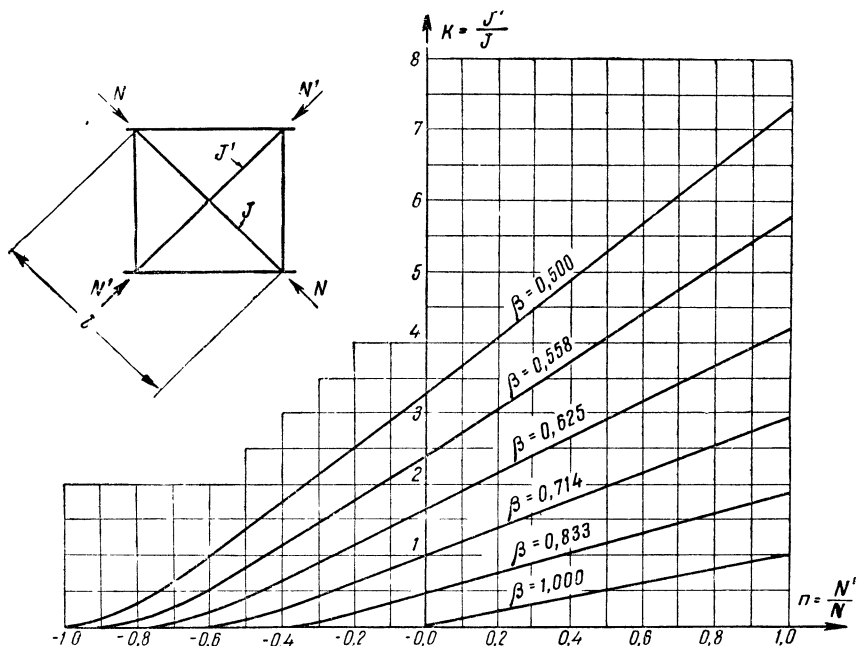


Рис. 90. Изостабы для пересекающихся раскосов равной длины (задача 11)

Будем писать L_6 вместо $L_6(u)$, L_6' вместо $L_6(u')$ и введем параметр

$$k = \frac{J'}{J}; \quad (27)$$

тогда критерием потери устойчивости будет служить уравнение

$$L_6 + kL_6' = 0.$$

Обозначим далее через n отношение усилий

$$n = \frac{N'}{N}, \quad (28)$$

тогда будем иметь

$$n = k \left(\frac{u'}{u} \right)^2. \quad (29)$$

Если теперь привести критерий потери устойчивости к виду

$$k = - \frac{L_6}{L_6'}, \quad (30)$$

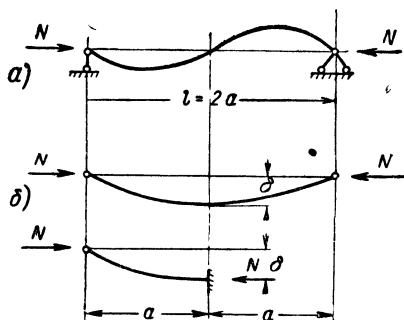


Рис. 91. Две формы потери устойчивости сжатого раскоса

то построение изостаб для рассматриваемой задачи не составит затруднений. Задаемся парой значений u и u' , вычисляем значение k по формуле (30); второй параметр n после этого определяется формулой (29). Полученная точка наносится на график (рис. 90). Коэффициент свободной длины β равен

$$\beta = \frac{\pi}{2u}.$$

Если поддерживающий раскос также сжат, то свободная длина для него определяется соотношением

$$\beta' = \sqrt{\frac{k}{n}} \beta.$$

Значение коэффициента β изменяется от $\beta=0,5$ до $\beta=1$. Заметим, что если поддерживающий раскос растянут, то $N' < 0$ и

$$L'_0 = \frac{|u'|^2}{1 - \frac{\operatorname{th} |u'|}{|u'|}},$$

где модуль аргумента равен

$$|u'| = \sqrt{\frac{|N'|}{EJ'}} a.$$

В случае, когда поддерживающий раскос сжат, определение свободной длины, помимо графика, может быть произведено также по приближенной формуле

$$\beta = \sqrt{\frac{1+n}{1+k}}. \quad (31)$$

В случае, когда поддерживающий раскос не нагружен или растянут ($n \leq 0$), эта формула дает значительную погрешность и не может быть рекомендована¹.

Если речь идет об определении свободной длины пересекающихся стержней разной длины l и l' , делящих друг друга пополам в точке пересечения, то выведенные выше формулы и график (рис. 90) сохраняют свою силу, но следует принимать

$$k = \frac{J' l^3}{J l'^3}; \quad n = \frac{N' l}{N l'}.$$

§ 49. ШАРНИРНАЯ ЦЕПЬ СТЕРЖНЕЙ НА УПРУГИХ ОПОРАХ

Задача 12. Шарнирная цепь n стержней на упругих опорах. Будем предполагать крайние опоры абсолютно жесткими, в то время как упругость $(n-1)$ промежуточных опор характеризуется коэффициентами $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$. Пусть далее l_k, EJ_k и N_k означают длину, жесткость и сжимающую силу для k -го стержня (рис. 92).

Здесь, так же как и в ранее рассмотренных задачах 5 и 10, возможны две независимые формы потери устойчивости. Если сжимающая сила в одном из стержней рассматриваемой цепи достигнет эйлерова значения, то ста-

¹ С. Д. Лейтес, Шесть задач на устойчивость статически неопределенных систем, «Строительная промышленность» № 7—8, 1938.

нет возможной потери устойчивости, характеризующаяся изгибом этого стержня по полуволне синусоиды. При этом упругие опоры системы не испытывают перемещений. Критическая сила определяется жесткостью стержня и не зависит от степени податливости упругих опор.

Нас будет интересовать, однако, другой случай, когда отклонение от первоначальной прямолинейной формы равновесия характеризуется переме-

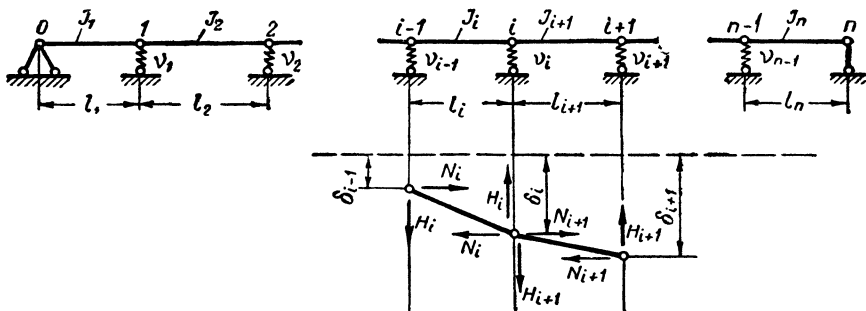


Рис. 92. Шарнирная цепь стержней на упругих опорах (задача 12)

щением упругих опор. При этом стержни системы остаются прямолинейными и не испытывают деформаций изгиба. Такого рода потеря устойчивости может иметь место в том случае, когда сжимающие силы, действующие на систему, достигнут определенной (критической) величины. Величина эта зависит от степени податливости упругих опор и не зависит от жесткости стержней, образующих цепь. Наша цель заключается в установлении зависимости между величиной критической силы и коэффициентами упругости опор.

Обозначим через δ_k перемещение k -й опоры, через R_k — реакцию этой опоры и рассмотрим условия равновесия системы в момент потери устойчивости. Для каждой из промежуточных опор имеем

$$R_k = v_k \delta_k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1). \quad (32)$$

Вырежем i -й и $(i+1)$ -й стержни системы. Имеем

$$R_i = H_i - H_{i+1},$$

где в силу простейших условий равновесия

$$H_i = N_i \frac{\delta_i - \delta_{i-1}}{l_i};$$

$$H_{i+1} = N_{i+1} \frac{\delta_{i+1} - \delta_i}{l_{i+1}}.$$

Используя (32), находим уравнение

$$\frac{N_i}{l_i} \delta_{i-1} + \left(-\frac{N_i}{l_i} - \frac{N_{i+1}}{l_{i+1}} + v_i \right) \delta_i + \frac{N_{i+1}}{l_{i+1}} \delta_{i+1} = 0, \quad (33)$$

связывающее перемещение трех последовательных опор. Такого рода уравнение может быть написано для каждой из $n-1$ промежуточных упругих

опор. Критерий потери устойчивости заключается в равенстве нулю определителя полученной системы линейных однородных уравнений:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\frac{N_1}{l_1} - \frac{N_2}{l_2} + v_1 & \frac{N_2}{l_2} & 0 & \dots \\ \frac{N_2}{l_2} & -\frac{N_2}{l_2} - \frac{N_3}{l_3} + v_2 & \frac{N_3}{l_3} & \dots \\ 0 & \frac{N_3}{l_3} & -\frac{N_3}{l_3} - \frac{N_4}{l_4} + v_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \quad (34)$$

Этот определитель имеет трехчленную симметричную структуру. Уравнение (34) представляет собой условие, связывающее все входящие в задачу величины, именно: n значений l_k , $(n-1)$ значений v_k и n значений N_k . Если понимать под N_k фактически действующие на систему силы (расчетные усилия), то можно поставить задачу о разыскании такого числа η , при умножении на которое всех сил N_k система потеряет устойчивость. Поставив таким образом задачу разыскания коэффициента запаса на устойчивость для рассматриваемой задачи, заменяем все входящие в (34) значения N_k через ηN_k и, раскрывая определитель, получаем алгебраическое уравнение степени $(n-1)$ относительно η . Для упрощения вычислений коэффициентов этого уравнения примем обозначения

$$\alpha_k = \frac{N_k}{v_k l_k}; \quad \beta_k = \frac{N_{k+1}}{v_k l_{k+1}}, \quad (35)$$

тогда критерий потери устойчивости принимает вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\alpha_1 - \beta_1 + \frac{1}{\eta} & \beta_1 & 0 & \dots \\ \alpha_2 & -\alpha_2 - \beta_2 + \frac{1}{\eta} & \beta_2 & \dots \\ 0 & \alpha_3 & -\alpha_3 - \beta_3 + \frac{1}{\eta} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \quad (36)$$

Полученный определитель, не является уже, как (34), симметричным, однако он обладает структурой *векового* уравнения что позволяет указать общий прием вычисления коэффициентов его разложения по степеням η .

Рассмотрим общий случай *векового* уравнения порядка m :

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} a_{11} + x & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} + x & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mm} + x \end{vmatrix} = 0$$

Здесь a_{ik} — заданные числа (причем в общем случае $a_{ik} \neq a_{ki}$),
 x — неизвестная величина, входящая в качестве слагаемого в элементы, расположенные по главной диагонали определителя.

В развернутом виде *вековое* уравнение имеет вид

$$x^m + C_{m-1} x^{m-1} + C_{m-2} x^{m-2} + \dots + C_2 x^2 + C_1 x + C_0 = 0.$$

Свободный член C_0 равен

$$C_0 = \Delta(0) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}.$$

Каждый из коэффициентов C_k равен сумме субдетерминантов порядка $(m-k)$, которые получаются из $\Delta(0)$ вычеркиванием строк и столбцов, пересекающихся на главной диагонали. Применение указанного свойства векового уравнения к критерию потери устойчивости (36) позволяет довольно просто составить уравнение, служащее для определения коэффициента запаса η на устойчивость.

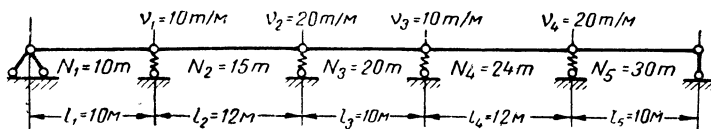


Рис. 93. Шарнирная цепь пяти упруго опертых стержней (пример к задаче 12)

В качестве примера применения выведенных формул рассмотрим шарнирную цепь из пяти упруго опертых стержней (рис. 93). Пусть будет дано:

$$\begin{aligned} l_1 &= 10 \text{ м}; & l_2 &= 12 \text{ м}; & l_3 &= 10 \text{ м}; & l_4 &= 12 \text{ м}; & l_5 &= 10 \text{ м}; \\ N_1 &= 10 \text{ м}; & N_2 &= 15 \text{ м}; & N_3 &= 20 \text{ м}; & N_4 &= 24 \text{ м}; & N_5 &= 30 \text{ м}; \\ v_1 &= 10 \text{ м/м}; & v_2 &= 20 \text{ м/м}; & v_3 &= 10 \text{ м/м}; & v_4 &= 20 \text{ м/м}; \end{aligned}$$

Требуется найти коэффициент запаса на устойчивость.

Вычисляем:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{10}{10 \cdot 10} = 0,1; & \beta_1 &= \frac{15}{10 \cdot 12} = 0,125; \\ \alpha_2 &= \frac{15}{20 \cdot 12} = 0,0625; & \beta_2 &= \frac{20}{20 \cdot 10} = 0,1; \\ \alpha_3 &= \frac{20}{10 \cdot 10} = 0,2; & \beta_3 &= \frac{24}{10 \cdot 12} = 0,2; \\ \alpha_4 &= \frac{24}{20 \cdot 12} = 0,1; & \beta_4 &= \frac{30}{20 \cdot 10} = 0,15 \end{aligned}$$

и составляем критерий потери устойчивости (36)

$$\Delta = \begin{vmatrix} -0,225 + \frac{1}{\eta} & 0,125 & 0 & 0 \\ 0,0625 & -0,1625 + \frac{1}{\eta} & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,2 & -0,4 + \frac{1}{\eta} & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,1 & -0,25 + \frac{1}{\eta} \end{vmatrix} = 0.$$

Далее находим

$$C_0 = \begin{vmatrix} -0,225 & 0,125 & 0 & 0 \\ 0,0625 & -0,1625 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,2 & -0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,1 & -0,25 \end{vmatrix} = 0,001175;$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \begin{vmatrix} -0,1625 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & -0,4 & 0,2 \\ 0 & 0,1 & -0,25 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -0,225 & 0 & 0 \\ 0 & -0,4 & 0,2 \\ 0 & 0,1 & -0,25 \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} -0,225 & 0,125 & 0 \\ 0,0625 & -0,1625 & 0 \\ 0 & 0 & -0,25 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -0,225 & 0,125 & 0 \\ 0,0625 & -0,1625 & 0,1 \\ 0 & 0,2 & -0,4 \end{vmatrix} = \\ &= -0,008 - 0,018 - 0,0071875 - 0,007 = -0,0401875; \\ C_2 &= \begin{vmatrix} -0,4 & 0,2 \\ 0,1 & -0,25 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -0,1625 & 0 \\ 0 & -0,25 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -0,1625 & 0,1 \\ 0,2 & -0,4 \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} -0,225 & 0 \\ 0 & -0,25 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -0,225 & 0 \\ 0 & -0,4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -0,225 & 0,125 \\ 0,0625 & -0,1625 \end{vmatrix} = \\ &= 0,08 + 0,040625 + 0,045 + 0,05625 + 0,09 + 0,02875 = 0,340625; \\ C_3 &= -0,225 - 0,1625 - 0,4 - 0,25 = -1,0375. \end{aligned}$$

Таким образом получаем уравнение четвертой степени.

$$\left(\frac{1}{\eta}\right)^4 - 1,0375 \left(\frac{1}{\eta}\right)^3 + 0,340625 \left(\frac{1}{\eta}\right)^2 - 0,0401875 \frac{1}{\eta} + 0,001175 = 0,$$

или

$$0,001175 \eta^4 - 0,0401875 \eta^3 + 0,340625 \eta^2 - 1,0375 \eta + 1 = 0.$$

Наименьший положительный корень этого уравнения равен $\eta = 1,887$.

Это и есть искомый коэффициент запаса системы на устойчивость¹.

Задача 13 (частный случай задачи 12). Шарнирная цепь n стержней на упругих опорах. Длины всех стержней равны между собой, сжимающая сила постоянна, коэффициенты упругости всех промежуточных опор одинаковы.

Трехчленное уравнение (33) принимает вид

$$\delta_{i-1} \left(2 - \frac{\sqrt{l}}{N}\right) \delta_i + \delta_{i+1} = 0. \quad (37)$$

Общее решение этого уравнения в конечных разностях второго порядка записывается в форме

$$\delta_i = A \sin \omega i + B \cos \omega i,$$

где $\cos \omega = 1 - \frac{\sqrt{l}}{2N}$,

¹ Для определителя высокого порядка указанный прием его развертывания в полином является слишком трудоемким. В этом случае применяются более совершенные методы разыскания корней векового уравнения, см. А. Ф. Смирнов, Статическая и динамическая устойчивость сооружений, Трансжелдориздат, 1947.

Граничные условия $\delta_0 = \delta_n = 0$ приводят к критерию потери устойчивости $\sin \omega n = 0$, откуда получаем ряд значений:

$$\omega n = \pi; 2\pi; \dots; (n-1)\pi.$$

Наименьшей величине критической силы соответствует корень $\omega n = (n-1)\pi$, следовательно:

$$N_k = \frac{\gamma l}{2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{n} \right)}. \quad (38)$$

Вычисленные по этой формуле значения N_k приведены в табл. 16.

Т а б л и ц а 16

Значения критической силы и предельные значения коэффициента упругости опор для шарнирной цепи стержней с крайними жесткими и промежуточными упругими опорами (задача 13)

Число пролетов	2	3	4	5	6	∞
$\frac{N_k}{\gamma l}$	0,5000	0,3333	0,2929	0,2764	0,2680	0,2500
$\frac{\gamma_0 l^3}{EJ}$	19,74	29,61	33,70	35,71	36,83	39,48

Величина критической силы колеблется от $N_k = 0,5 \gamma l$ при $n=2$ до $N_k = 0,25 \gamma l$ при $n=\infty$.

Рассматриваемая задача может быть поставлена также и следующим образом. Пусть требуется найти для данной n -пролетной балки то предельное значение коэффициента упругости опор γ_0 , при котором критическая сила, зависящая от этого коэффициента, окажется равной эйлеровой

$$N_3 = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$

Очевидно, что в этом случае упругие опоры можно рассматривать как вполне жесткие и каждый из шарнирно сочлененных стержней рассчитывать, исходя из свободной длины $l_0 = l$. Дальнейшее возрастание коэффициента упругости опор уже не увеличивает устойчивости системы.

Аналитическое условие равновозможности обеих форм потери устойчивости (изгиб стержней при неподвижных опорах и перемещение опор при прямолинейном состоянии стержней) записывается в виде $N_3 = N_k$, откуда на основании (38) находим

$$\frac{\gamma_0 l^3}{EJ} = 2\pi^2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{n} \right). \quad (39)$$

Предельные значения коэффициента упругости опор приведены в табл. 16.

Задача 14. Шарнирная цепь стержней на упругих опорах; абсолютно жесткой является только одна опора (рис. 94). Здесь, в отличие от ранее рассмотренной задачи 12, последняя n -я опора также является упругой.

Трехчленное уравнение (33) сохраняет свою силу для $(n-1)$ промежуточных опор. Для последней n -й опоры легко получить

$$\frac{N_n}{l_n} \delta_{n-1} + \left(-\frac{N_n}{l_n} + \gamma_n \right) \delta_n = 0.$$

После введения коэффициента запаса η , используя обозначения (35), получаем критерий потери устойчивости в виде векового уравнения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\alpha_1 - \beta_1 + \frac{1}{\eta} & \beta_1 & 0 & \dots & \dots \\ \alpha_2 & -\alpha_2 - \beta_2 + \frac{1}{\eta} & \beta_2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_n & -\alpha_n + \frac{1}{\eta} \end{vmatrix} = 0. \quad (40)$$

Задача 14а (частный случай задачи 14). Шарнирная цепь n стержней на одной жесткой и прочих упругих опорах. Длины стержней равны между собой; сжимающая сила постоянна, и все упругие опоры обладают равным

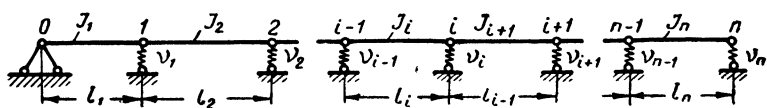


Рис. 94. Шарнирная цепь стержней на упругих опорах (задача 14)

коэффициентом упругости. Мы исходим из уравнения в конечных разностях (37) и получаем общее решение в виде

$$\delta_i = A \sin \omega i + B \cos \omega i,$$

где $\cos \omega = 1 - \frac{\nu l}{2l}$.

Граничные условия в данном случае имеют вид $\delta_0 = 0$ и $\delta_n = \delta_{n+1}$. Первое условие дает $B=0$, второе условие

$$A [\sin \omega n - \sin \omega (n+1)] = 0$$

приводит к критерию потери устойчивости

$$\sin \omega n - \sin \omega (n+1) = 0,$$

откуда

$$\cos \omega \frac{2n+1}{2} \sin \frac{\omega}{2} = 0.$$

Если $\sin \frac{\omega}{2} = 0$, то $\omega = 2k\pi$ ($k=0,1, \dots$), следовательно, все δ_i равны нулю и система сохраняет состояние прямолинейного равновесия. Равенство нулю второго множителя

$$\cos \omega \frac{2n+1}{2} = 0$$

дает

$$\omega \frac{2n+1}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k=0,1, \dots, n-1).$$

Таким образом находим

$$\omega = \frac{2k+1}{2n+1} \pi,$$

и критическое значение сжимающей силы равно

$$N_k = \frac{\sqrt{l}}{2 \left(1 - \cos \frac{2k+1}{2n+1} \pi \right)}.$$

Теперь остается подобрать целое число k таким образом, чтобы величина N_k была наименьшей. Этому условию удовлетворяет значение

$$k = n - 1,$$

следовательно:

$$\cos \omega = \cos \frac{2n-1}{2n+1} \pi = -\cos \frac{2\pi}{2n+1}$$

и окончательно

$$N_k = \frac{\sqrt{l}}{2 \left(1 + \cos \frac{2\pi}{2n+1} \right)}. \quad (41)$$

Вычисленные по этой формуле значения N_k приведены в табл. 17. В этой же таблице даны предельные значения коэффициента упругости опор

$$\frac{\nu_0 l^3}{EJ} = 2\pi^2 \left(1 + \cos \frac{2\pi}{2n+1} \right), \quad (42)$$

при которых опоры можно рассматривать как вполне жесткие.

Таблица 17

Значения критической силы и предельные значения коэффициента упругости опор для шарнирной цепи стержней с одной жесткой и прочими упругими опорами (задача 14а)

Число пролетов	1	2	3	4	5	6	∞
$\frac{N_k}{\sqrt{l}}$	1,0000	0,3820	0,3080	0,2831	0,2715	0,2652	0,2500
$\frac{\nu_0 l^3}{EJ}$	9,87	25,85	32,05	34,86	36,34	37,22	39,48

§ 50. НЕРАЗРЕЗНАЯ БАЛКА НА ЖЕСТКИХ ОПОРАХ

Задача 15. Двухпролетная неразрезная балка с шарнирно опертыми концами (рис. 95). Уравнение трех моментов в данном случае при $M_0=M_2=0$ имеет вид

$$\left[\frac{l_1}{J_1} c_1 + \frac{l_2}{J_2} c_2 \right] M_1 = 0,$$

где

$$c_1 = c(u_1) = \frac{1}{u_1^2} (1 - u_1 \operatorname{ctg} u_1);$$

аналогичным образом выражается функция $c_2 = c(u_2)$.

Обозначая через k отношение погонных жесткостей

$$k = \frac{J_2 l_1}{J_1 l_2}, \quad (43)$$

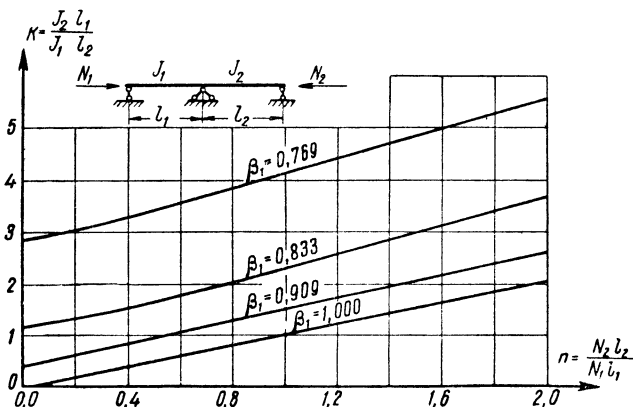


Рис. 95. Изоставы для двухпролетной балки (задача 15)

получаем критерий потери устойчивости в виде

$$kc_1 + c_2 = 0. \quad (44)$$

Далее вводим второй параметр

$$n = \frac{N_2 l_2}{N_1 l_1} \quad (45)$$

и получаем

$$n = k \left(\frac{u_2}{u_1} \right)^2. \quad (46)$$

Изоставы представлены на рис. 95. Коэффициент свободной длины для второго пролета определяется по формуле

$$\beta_2 = \sqrt{\frac{k}{n}} \beta_1. \quad (47)$$

Эта формула сохраняет свою силу для всех задач данного параграфа.

Задача 16. Двухпролетная неразрезная балка с одним защемленным и другим шарнирно опертым концом (рис. 96).

Каноническое уравнение метода деформаций

$$\left[\frac{J_1}{l_1} L_1(u_1) + \frac{J_2}{l_2} L_5(u_2) \right] \varphi_1 = 0$$

приводит после введения параметра k при помощи соотношения (43) к условию потери устойчивости

$$L_1(u_1) + kL_5(u_2) = 0.$$

Второй параметр n содержит отношение сжимающих сил и определяется формулой (45). Приводя уравнение (47) к виду

$$k = -\frac{L_1(u_1)}{L_5(u_2)}, \quad (48)$$

получаем возможность построить изостобы для рассматриваемой задачи. Соотношение (46), служащее для вычисления параметра n , сохраняет свою силу.

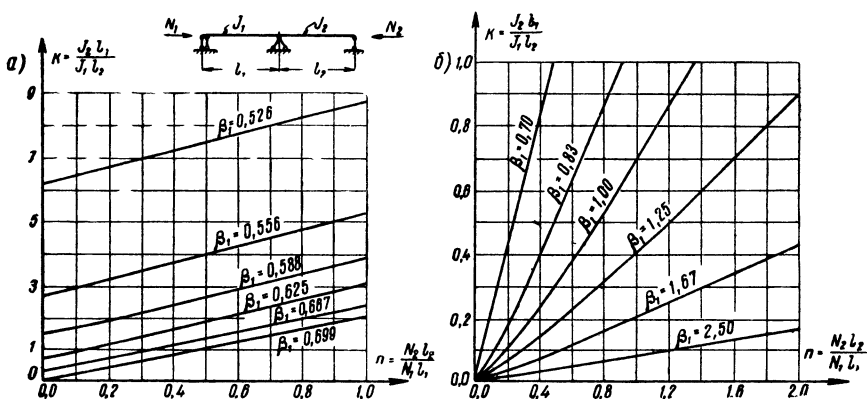


Рис. 96. Изостобы для двухпролетной балки (задача 16)

Вследствие широкого диапазона изменения аргумента u_1 в пределах $0 < u_1 < 2\pi$ целесообразно построить два графика с разными масштабами по координатным осям. Первый график (рис. 96, а) охватывает случаи $k \geq 2,046n$ и содержит изостобы $\beta_1 \leq 0,7$. Второй график (рис. 96, б), построенный в более крупном масштабе, содержит изостобы $\beta_1 \geq 0,7$ и охватывает случаи $k \leq 2,046n$.

Задача 17. Двухпролетная неразрезная балка с двумя защемленными концами (рис. 97).

Каноническое уравнение метода деформаций

$$\left[\frac{J_1}{l_1} L_1(u_1) + \frac{J_2}{l_2} L_1(u_2) \right] \varphi_1 = 0$$

приводит к условию потери устойчивости

$$L_1(u_1) + kL_1(u_2) = 0,$$

откуда

$$k = -\frac{L_1(u_1)}{L_1(u_2)}. \quad (49)$$

Задача 18. Двухпролетный стержень, имеющий на одном конце подвижную заделку и на другом конце шарнирную опору (рис. 98).

Каноническое уравнение метода деформаций имеет вид

$$\left[\frac{J_1}{l_1} L_7(u_1) + \frac{J_2}{l_2} L_5(u_2) \right] \varphi_1 = 0.$$

После введения параметров k и n при помощи соотношений (43) и (45) получаем критерий потери устойчивости

$$L_7(u_1) + k L_5(u_2) = 0,$$

откуда

$$k = - \frac{L_7(u_1)}{L_5(u_2)}. \quad (50)$$

Изоσταбы даны на двух графиках (рис. 98, а и б). Полученное решение может быть использовано для определения коэффициентов свободной длины симметричной трехпролетной балки с шарнирно опертыми концами при симметричной форме потери устойчивости.

Задача 19. Двухпролетный стержень, имеющий на одном конце подвижную, на другом конце — неподвижную заделку (рис. 99).

Каноническое уравнение метода деформаций имеет вид

$$\left[\frac{J_1}{l_1} L_7(u_1) + \frac{J_2}{l_2} L_1(u_2) \right] \varphi_1 = 0.$$

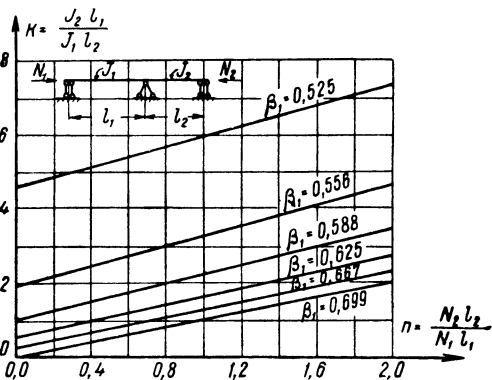


Рис. 97. Изоσταбы для двухпролетной балки (задача 17)

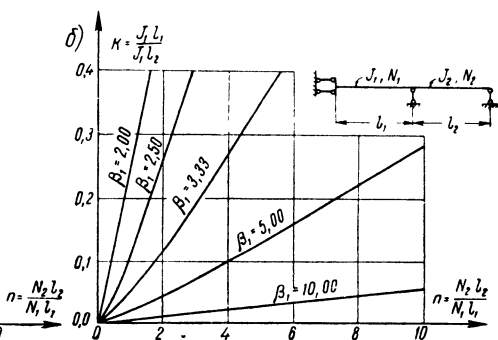
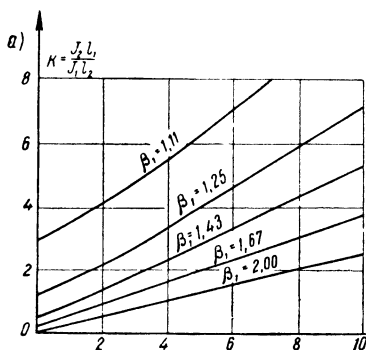


Рис. 98. Изоσταбы для двухпролетной балки (задача 18)

Критерий потери устойчивости

$$L_7(u_1) + k L_1(u_2) = 0,$$

откуда

$$k = - \frac{L_7(u_1)}{L_1(u_2)}. \quad (51)$$

Изоσταбы даны на двух графиках (рис. 99, а и б). Полученное решение может быть использовано для определения коэффициентов свободной длины симметричной трехпролетной балки с защемленными концами при симметричной форме потери устойчивости.

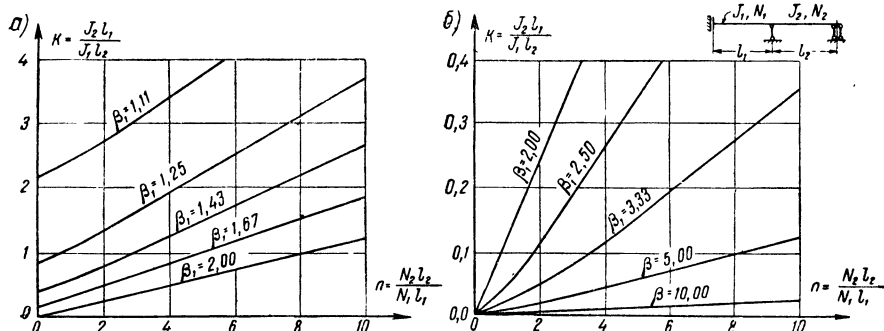


Рис. 99. Изоσταбы для двухпролетной балки (задача 19)

Задача 20. Нерезренная n -пролетная балка с равными пролетами, постоянной жесткостью и постоянной сжимающей силой. Концы балки оперты шарнирно (рис. 100).

Весьма просто решение получается при помощи уравнения трех углов поворота (метод деформаций). Имеем

$$\varphi_{i-1} + 2p\varphi_i + \varphi_{i+1} = 0, \quad (52)$$

где

$$p = p(u) = \frac{L_1(u)}{L_2(u)}. \quad (53)$$

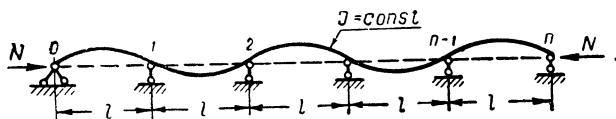


Рис. 100. Равнопролетная балка постоянной жесткости с постоянной сжимающей силой при шарнирно опертых концах (задача 20)

Решение этого уравнения в конечных разностях может быть записано в форме

$$\varphi_i = C_1 \sin \omega i + C_2 \cos \omega i, \quad (54)$$

причем

$$\cos \omega = -p. \quad (55)$$

Для опоры 0 можно написать граничное условие

$$\varphi_0 L_1(u) + \varphi_1 L_2(u) = 0$$

или

$$p\varphi_0 + \varphi_1 = 0.$$

Аналогичным образом для опоры n имеем

$$\varphi_{n-1} + p\varphi_n = 0.$$

После преобразований граничные условия принимают вид

$$\begin{aligned} C_1 \sin \omega &= 0; \\ -C_1 \cos \omega n + C_2 \sin \omega n &= 0. \end{aligned}$$

Критерий потери устойчивости заключается в равенстве нулю определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin \omega & 0 \\ -\cos \omega n & \sin \omega n \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\sin \omega \sin \omega n = 0.$$

Из условия равенства нулю первого множителя находим $\omega = \pi$. Равенство нулю второго множителя дает $\sin \omega n = 0$, откуда

$$\omega = \frac{k\pi}{n} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

В этом последнем выражении содержится также и корень $\omega = \pi$. Поэтому в силу соотношения (55) имеем

$$p = -\cos \frac{k\pi}{n} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Выбираем число k таким образом, чтобы получить для аргумента u наименьшее значение. Этому условию удовлетворяет значение $k=n$. Следовательно, $\omega = \pi$, и из уравнения

$$p = \frac{L_1(u)}{L_2(u)} = -\cos \pi = 1$$

находим $u = \pi$.

Критическое значение аргумента не зависит, таким образом, от числа пролетов n балки. Свободная длина для любого из пролетов балки равна l ; коэффициент свободной длины $\beta = 1$.

Задача 21. Неразрезная n -пролетная балка с равными пролетами, постоянной жесткостью и постоянной сжимающей силой. Концы балки зашпелены (рис. 101).

Сохраняют свою силу уравнение трех углов поворота (52), соотношения (53), (54) и (55). Граничные условия в данном случае записываются в виде $\varphi_0 = 0$, $\varphi_n = 0$. Первое условие $\varphi_0 = C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 = 0$ дает $C_2 = 0$. Из второго условия $\varphi_n = C_1 \sin \omega n = 0$ получаем критерий потери устойчивости в форме $\sin \omega n = 0$, откуда

$$\omega = \frac{k\pi}{n} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Таким образом, имеем

$$p = \frac{L_1(u)}{L_2(u)} = -\cos \frac{k\pi}{n} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Заметим, что если принять теперь $k=n$, $\omega=\pi$, то для φ_i получим выражение, тождественно равное нулю:

$$\varphi_i = C_1 \sin i\pi = 0.$$

Следовательно, значение $k=n$ не отвечает случаю изгиба. Берем ближайшее значение $k=n-1$ и получаем

$$\rho = \frac{L_1(u)}{L_2(u)} = -\cos \frac{n-1}{n} \pi,$$

или, так как

$$-\cos \frac{n-1}{n} \pi = -\cos \left(\pi - \frac{\pi}{n} \right) = \cos \frac{\pi}{n},$$

то окончательно

$$\frac{L_1(u)}{L_2(u)} = \frac{\sin u - u \cos u}{u \sin u} = \cos \frac{\pi}{n}. \quad (56)$$

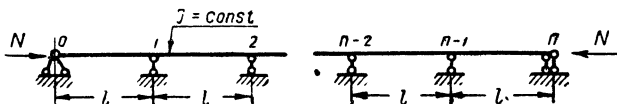


Рис. 101. Равнопролетная балка постоянной жесткости с постоянной сжимающей силой; оба конца защемлены (задача 21)

Для каждого заданного (целого положительного) числа пролетов n можно найти соответствующее значение u и тем самым определить коэффициент свободной длины β . Эти значения приведены в табл. 18.

Таблица 18

Значения коэффициента свободной длины β для неразрезной балки с защемленными концами (задача 21)

Число пролетов	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	∞
β	0,500	0,699	0,814	0,879	0,917	0,939	0,954	0,964	0,971	0,977	1,000

Задача 22. Неразрезная n -пролетная балка с равными пролетами, постоянной жесткостью и постоянной сжимающей силой. Один конец балки оперт шарнирно, другой конец защемлен (рис. 102).

Эта задача была подробно исследована в главе седьмой, § 45. Окончательный результат был получен в виде формулы

$$\frac{\sin u - u \cos u}{u - \sin u} = \cos \frac{\pi}{2n}, \quad (57)$$

которая аналогична формуле (56). Сравнение этих двух формул показывает, что рассматриваемая неразрезная балка эквивалентна по устойчивости балке с двумя защемленными концами с числом пролетов $2n$. Значения коэффициента свободной длины β приведены в табл. 19.

Значения коэффициента свободной длины β для неразрезной балки с одним шарнирным и другим защемленным концом (задача 22)

Число пролетов	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	∞
β	0,699	0,879	0,939	0,964	0,977	0,983	0,988	0,990	0,992	0,994	1,000

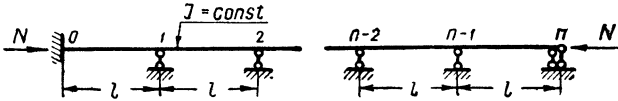


Рис. 102. Равнопролетная балка постоянной жесткости с постоянной сжимающей силой; один конец оперт шарнирно, другой — защемлен (задача 22)

§ 51. НЕРАЗРЕЗНАЯ БАЛКА НА КРАЙНИХ ЖЕСТКИХ И ПРОМЕЖУТОЧНЫХ УПРУГИХ ОПОРАХ

Задача 23. Неразрезная n -пролетная балка, крайние опоры жесткие, промежуточные опоры упругие. Жесткость и сжимающая сила постоянны по всей длине балки, пролеты равны, коэффициенты упругости промежуточных опор одинаковы (рис. 103).

К этой задаче приводится обычно исследование устойчивости сжатых поясов открытых мостов. Сложность и практическое значение задачи при-

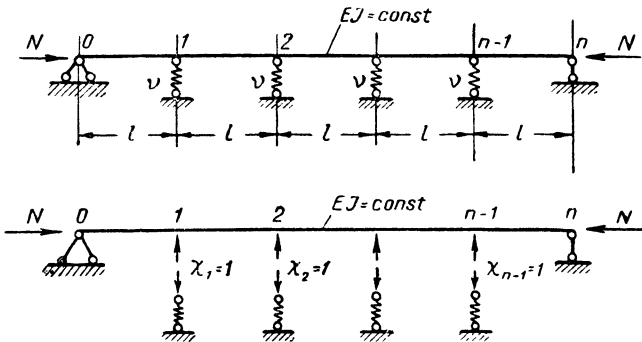


Рис. 103. Неразрезная балка на крайних жестких и промежуточных упругих опорах. Исследование устойчивости при помощи метода сил (задача 23)

влекли к ней внимание многих выдающихся исследователей. Ф. С. Ясинский и П. Ф. Паткович решали задачу при помощи метода Ритца. И. Г. Бубнов применил метод сил, Ф. Блейх использовал смешанный метод.

Упругие свойства промежуточных опор характеризуются линейной зависимостью между смещением опоры δ_k и упругой реакцией R :

$$R_k = \nu \delta_k. \quad (58)$$

Коэффициент упругости опор γ имеет размерность $\frac{\text{сила}}{\text{длина}}$.

Переход к параметру нулевой размерности совершается при помощи соотношения

$$m = \frac{\sqrt{l^3}}{EJ}. \quad (59)$$

Сжимающая сила N определяет величину аргумента

$$u = \sqrt{\frac{N}{LJ}} l. \quad (60)$$

Решение задачи предполагает построение зависимости между аргументом u и параметром m при данном числе n пролетов балки.

Следуя установившейся традиции, эту зависимость представляют обычно в форме

$$m = 2u^2 \Phi_n(u), \quad (61)$$

или в форме

$$\frac{\sqrt{l}}{2N} = \Phi_n(u). \quad (62)$$

Легко видеть, что обе формы являются равносильными. Задача сводится к построению функции $\Phi_n(u)$, которая зависит также от числа пролетов n балки.

Как уже упоминалось, исследование И. Г. Бубнова основано на идее метода сил, хотя Бубнов не пользовался аппаратом и терминологией, присущими этому методу. Изложим ход исследования Бубнова в современной трактовке. Основную систему метода сил образуем, разрезая упругие опорные стерженьки. За лишние неизвестные примем опорные реакции $R_i = X$. Общее число лишних неизвестных равно $(n-1)$, т. е. на единицу меньше числа пролетов балки (рис. 103).

Перемещения основной системы равны

$$\delta_{ik} = a_{ik} + b_{ik}, \quad (63)$$

где a_{ik} — интеграл соответствующих эпюр моментов по обобщенной формуле Мора, отражающей работу изгиба балки;

b_{ik} оценивает работу упругих опорных стерженьков; в данном случае имеем $b_{ik} = 0$ при $i \neq k$ и $b_{ii} = \frac{1}{\gamma}$.

Примем во внимание, что a_{ik} представляет собой прогиб шарнирно опертой балки пролетом nl в точке с абсциссой il от единичной силы, приложенной в точке с абсциссой kl :

$$a_{ik} = \frac{l}{Nu} \left[\frac{\sin(n-k)u}{\sin nu} \sin iu - \frac{n-k}{n} iu \right] \quad (k > i). \quad (64)$$

Условие потери устойчивости имеет вид векового уравнения

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} + \frac{1}{\gamma} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} + \frac{1}{\gamma} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + \frac{1}{\gamma} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} + \frac{1}{\gamma} \end{vmatrix} = 0. \quad (65)$$

Порядок определителя равен $(n-1)$. Исследование той же задачи методом деформаций или же смешанным методом приводит к определителю вдвое более высокого порядка.

Далее Бубнов ставит задачу о разыскании *предельного* значения коэффициента упругости опор γ_0 , при котором опоры можно рассматривать как вполне жесткие¹. Это предельное значение коэффициента упругости опор соответствует значению аргумента $u = \pi$, критическая сила при этом равна Эйлеровой

$$N_0 = \frac{\pi^2 F J}{l^2}.$$

Дальнейшее возрастание жесткости упругих опор уже не увеличивает критическую силу системы, так как всегда возможна такая деформация потери устойчивости, при которой опорные сечения не смещаются и каждый пролет изгибается по полуволне синусоиды как шарнирно опертый стержень.

Для вычисления предельного значения коэффициента упругости опор необходимо положить $u = \pi$ и найти

$$\lim_{u \rightarrow \pi} a_{ik} = - \frac{l}{N} \cdot \frac{n-k}{n} \quad i \ (k > i). \quad (66)$$

Обозначая для краткости

$$z = \frac{nN}{\sqrt{l}}, \quad (67)$$

приводим условие потери устойчивости к виду

$$\Delta = \begin{vmatrix} (n-1)-z & (n-2) & (n-3) & \dots & 1 \\ (n-2) & 2(n-2)-z & 2(n-3) & \dots & 2 \\ (n-3) & 2(n-3) & 3(n-3)-z & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & (n-1)-z \end{vmatrix} = 0. \quad (68)$$

Полученный определитель весьма прост, так как не содержит трансцендентных функций. Закон образования этого определителя очевиден; кроме того, определитель двоякосимметричен. Это обстоятельство делает весьма удобным его разворачивание; в силу свойства симметрии определитель может быть представлен в виде произведения двух определителей. Таким путем для каждого заданного числа пролетов n может быть найдено уравнение степени $(n-1)$ относительно неизвестного z . Наименьший положительный корень этого уравнения определяет искомое значение z . Далее легко найти

$$\Phi_n(\pi) = \frac{n}{2z} \quad (69)$$

и предельное значение параметра

$$m_0 = 2\pi^2 \Phi_n(\pi) = \frac{\pi^2 n}{z}. \quad (70)$$

Такого рода вычисления провел Бубнов для ряда значений n . Несмотря на свою простоту, эти вычисления все же громоздки. Уравнение (68) допускает решение в замкнутой форме.

¹ И. Г. Бубнов, Строительная механика корабля, ч. I, 1912.

$$z = \frac{n}{2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{n} \right)},$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \Phi_n(\pi) &= 1 + \cos \frac{\pi}{n}; \\ m_0 &= 2\pi^2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{n} \right). \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Чрезвычайно интересно сравнить рассматриваемую задачу с задачей 13, в которой исследуется шарнирная цепь стержней на упругих опорах. Полное совпадение результатов показывает, что предельные значения коэффициентов упругости опор одинаковы для неразрезной балки на упругих опорах и для шарнирной цепи упруго опертых стержней. Это обстоятельство становится вполне понятным, если принять во внимание, что при $u = \pi$ во всех опорных сечениях неразрезной балки образуются точки перегиба, все опорные моменты равны нулю, так что неразрезность как бы перестает оказывать свое влияние¹.

Таблица 20

Предельное значение параметров $\Phi_n(\pi)$ и m_0 для неразрезной балки на крайних жестких и промежуточных упругих опорах (задача 23)

Число пролетов	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	∞
$\Phi_n(\pi)$	1,000	1,500	1,707	1,809	1,866	1,901	1,924	1,940	1,951	1,959	1,966	2,000
m_0	19,74	29,61	33,70	35,71	36,83	37,52	37,98	38,29	38,51	38,68	38,81	39,48

Табл. 20 содержит вычисленные по формулам (71) значения $\varphi_n(\pi)$ и m_0 для $n=2, 3, \dots, 12$ и для случая $n=\infty$. В этом последнем случае имеем

$$\Phi_\infty(\pi) = 2; \quad m_0 = 4\pi^2.$$

Данные табл. 20 совпадают с найденными И. Г. Бубновым путем непосредственного разворачивания определителя (68) величинами².

Таким образом, нам известно начальное значение функции $\Phi_n(u)$, так как

$$\Phi_n(0) = 0,$$

и конечное ее значение при $u = \pi$, определяемое формулой (71).

¹ В книге Н. К. Снитко «Устойчивость стержневых систем» (Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре, 1952) как бы противопоставляются предельные значения коэффициентов упругости опор для неразрезной балки и для шарнирной цепи стержней.

² Составленная И. Г. Бубновым табличка содержит значения величины, равной (в наших обозначениях) $\frac{1}{2\Phi_n(\pi)}$ при $n=2, 3, 4, 5, 6, 7, 9$ и 11.

Для решения рассматриваемой задачи Ф. Блейх применил смешанный метод и теорию уравнений в конечных разностях¹, что дало возможность получить решение в замкнутой форме:

$$\Phi_n(u) = \frac{1 - \cos u - x}{\frac{1 - \cos u}{x} - \left(1 - \frac{\sin u}{u}\right)}. \quad (72)$$

Здесь обозначено

$$x = 1 - \cos \frac{k\pi}{n} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1). \quad (73)$$

Каждому из указанных значений k соответствует своя ветвь кривой $\Phi_n(u)$.

Для определения наибольшего из $(n-1)$ значений $\Phi_n(u)$ составляем условие экстремума:

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial x} = 0,$$

откуда находим два значения

$$x = \frac{1 - \cos u}{1 \pm \sqrt{\frac{\sin u}{u}}}.$$

Максимуму соответствует знак плюс, следовательно

$$x = \frac{1 - \cos u}{1 + \sqrt{\frac{\sin u}{u}}}. \quad (74)$$

Найденное таким путем значение x , вообще говоря, не заключается среди $(n-1)$ значений, даваемых формулой (73), поэтому следует испытывать из этих значений ближайшие к найденному.

В случае $n = \infty$ величина x принимает все значения в интервале $0 \leq x \leq 2$. Подставляя для этого случая значение (74) в формулу (72), получаем

$$\Phi_\infty(u) = \frac{1 - \cos u}{\left(1 + \sqrt{\frac{\sin u}{u}}\right)^2}. \quad (75)$$

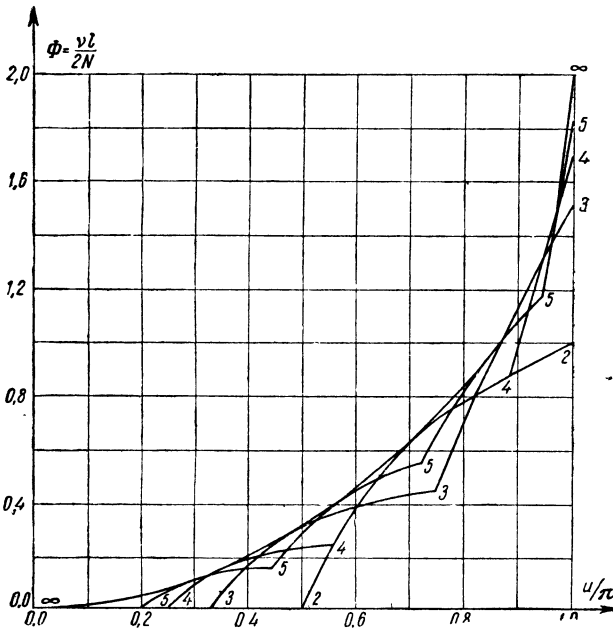
Это есть уравнение огибающей бесконечного количества ветвей, которые определяются формулами (72) и (73) при $n = \infty$.

В табл. 21 приведены значения $\Phi_\infty(u)$. Ф. Блейх построил графики функций $\Phi_n(u)$ при $n=2, 4, 10$, но при этом ошибочно изобразил их как повсюду плавные кривые. В действительности же график функции $\Phi_n(u)$ должен состоять из $(n-1)$ ветвей, пересекающихся под углом. Правильное очертание таких графиков дано на рис. 104.

¹ Ф. Блейх, Теория и расчет железных мостов, Гострансиздат, 1931.

Значения функции $\Phi_{\infty}(u)$

$\frac{u}{\pi}$	Φ	$\frac{u}{\pi}$	Φ	$\frac{u}{\pi}$	Φ
0,30	0,111	0,58	0,417	0,86	0,976
0,32	0,126	0,60	0,447	0,88	1,036
0,34	0,142	0,62	0,478	0,90	1,102
0,36	0,160	0,64	0,510	0,91	1,138
0,38	0,179	0,66	0,544	0,92	1,177
0,40	0,198	0,68	0,578	0,93	1,219
0,42	0,218	0,70	0,614	0,94	1,264
0,44	0,239	0,72	0,652	0,95	1,316
0,46	0,261	0,74	0,692	0,96	1,375
0,48	0,285	0,76	0,734	0,97	1,444
0,50	0,309	0,78	0,777	0,98	1,530
0,52	0,335	0,80	0,822	0,99	1,652
0,54	0,361	0,82	0,870	1,00	2,000
0,56	0,388	0,84	0,921		

Рис. 104. График функции $\Phi_n(u)$ для неразрезной балки на крайних жестких и промежуточных упругих опорах (цифры у кривых указывают число пролетов n)

Формула (75) позволяет без труда построить график (рис. 105) зависимости коэффициента свободной длины β от параметра m при $n=\infty$. В силу соотношения (61) имеем

$$m = \frac{2u^2(1 - \cos u)}{\left(1 + \sqrt{\frac{\sin u}{u}}\right)^2} \quad (76)$$

Кривая $\beta(m)$ при $n = \infty$ лежит выше всех кривых для конечных значений n , поэтому графиком (рис. 105) можно пользоваться при конечном числе пролетов, получая при этом несколько завышенные значения коэффициента свободной длины.

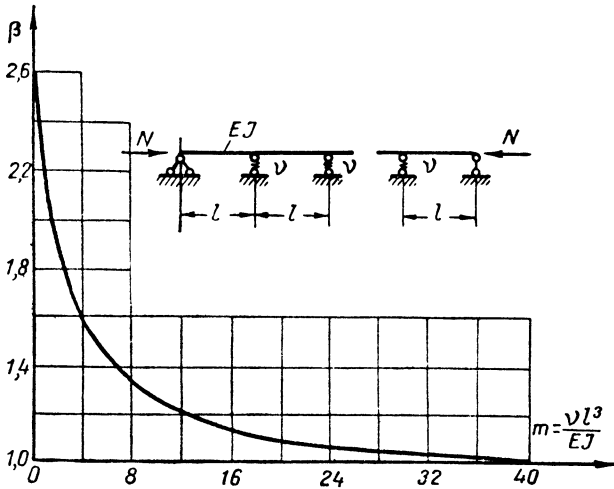


Рис. 105. График $\beta(m)$ для неразрезной балки на упругих опорах при бесконечно большом числе пролетов (задача 23)

§ 52. НЕРАЗРЕЗНАЯ БАЛКА НА ОДНОЙ ЖЕСТКОЙ И ПРОЧИХ УПРУГИХ ОПОРАХ

Задача 24. Неразрезная n -пролетная балка с крайней жесткой опорой и прочими упругими опорами. Жесткость и сжимающая сила постоянны по всей длине балки; пролеты равны; податливость упругих опор одинакова (рис. 106).

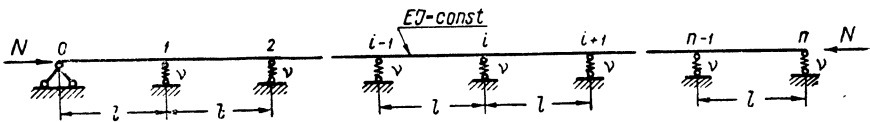


Рис. 106. Неразрезная балка на одной жесткой и прочих упругих опорах (задача 24)

Задача эта сложнее, чем предыдущая и гораздо менее разработана. Исследование возможно при помощи метода сил, метода деформаций или же смешанного метода, но замкнутого решения в общем виде получить не удалось. Ограничимся некоторыми общими соображениями.

Решение может быть представлено в форме (61) и (62). Задача сводится к построению функции $\Phi_n(u)$, которая, естественно, будет отличаться от функции, найденной для предшествующей задачи. Только при $n=\infty$ функции $\infty(u)$ для обеих задач совпадают.

Исследование устойчивости системы одним из упомянутых выше методов приводит к алгебраическому уравнению степени n относительно $\Phi_n(u)$:

$$\Phi^n + C_{n-1} \Phi^{n-1} + \dots + C_2 \Phi^2 + C_1 \Phi + C_0 = 0, \quad (77)$$

где коэффициенты C_i являются функциями аргумента u .

Отсюда определяется n ветвей кривой $\Phi_n(u)$. Для каждого фиксированного значения n мы должны принять во внимание наибольшее из значений $\Phi_n(u)$. В предыдущей задаче мы видели, что каждая из $(n-1)$ ветвей имеет

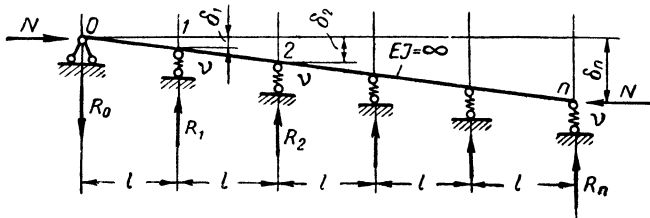


Рис. 107. Бесконечно жесткий стержень на упругих опорах

свой участок, в котором эта ветвь дает решающее наибольшее значение. В рассматриваемой задаче каждая из ветвей имеет действительные и положительные значения на некотором участке внутри интервала $0 < u < \pi$, однако некоторые из ветвей $\Phi_n(u)$ расположены целиком ниже других ветвей этой же кривой и потому не имеют решающего значения ни в одной из точек.

В отличие от предыдущей задачи график функции $\Phi_n(u)$ не исходит из начала координат. При $u=0$ функция имеет некоторое положительное значение $\Phi_n(0)$, которое может быть найдено из следующих соображений, основанных на анализе статического смысла поставленной задачи.

Примем во внимание, что условие $u=0$ при конечном значении $\Phi_n(0)$ может иметь место только при $EJ=\infty$. Поэтому задача разыскания $\Phi_n(0)$ сводится к исследованию устойчивости сравнительно несложной системы, именно — неразрезного бесконечно жесткого стержня на одной жесткой и прочих упругих опорах при равных пролетах, постоянной сжимающей силе и равном коэффициенте упругости упругих опор (рис. 107). В момент потери устойчивости бесконечно жесткий стержень сохранит свою прямолинейность, но каждая из упругих опор переместится на величину δ_i . Очевидно, что все перемещения δ_i являются линейными функциями индекса i , поэтому

$$\delta_2 = 2\delta_1; \quad \delta_3 = 3\delta_1; \quad \dots; \quad \delta_i = i\delta_1.$$

Составим теперь условие равновесия, выражающее равенство нулю суммы моментов всех сил относительно жесткой опоры.

Получаем

$$\sum_{i=1}^n R_i i l - N \delta_n = 0,$$

где R_i — реакция i -й опоры.

Принимая во внимание, что в силу упругости опор $R_i = \gamma \delta_i = i \gamma \delta_1$, находим

Таблица 22
Предельные значения параметров Φ_n и m_0 для неразрезной балки на одной жесткой и прочих упругих опорах (задача 24)

Число пролетов	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	∞
$\Phi_n(0)$	0,5000	0,2000	0,1071	0,0667	0,0455	0,0330	0,0250	0,0196	0,0158	0,0130	0,0109	0,0092	0,0000
$\Phi_n(\pi)$	0,500	1,309	1,623	1,766	1,841	1,885	1,914	1,932	1,946	1,956	1,963	1,969	2,000
m_0	9,87	25,85	32,05	34,86	36,34	37,22	37,77	38,15	38,41	38,60	38,75	38,86	39,48

$$\sqrt{l} \delta_1 \sum_{i=1}^n i^2 - N n \delta_1 = 0,$$

откуда критерий потери устойчивости

$$\sqrt{l} \sum_{i=1}^n i^2 - nN = 0. \quad (78)$$

В результате находим значение критической силы

$$N_k = \frac{(2n+1)(n+1)}{6} \sqrt{l}, \quad (79)$$

и для $\Phi_n(0)$ получаем окончательно

$$\Phi_n(0) = \frac{3}{(n+1)(2n+1)}. \quad (80)$$

Далее мы поставим и разрешим задачу об определении значений $\Phi_n(\pi)$. Эта задача полностью аналогична задаче Бубнова о разыскании предельного значения коэффициента γ_0 для балки с крайними жесткими опорами. Оказывается, что и для рассматриваемого случая, когда только одна крайняя опора является жесткой, имеется такое значение коэффициента γ_0 , при котором упругие опоры балки ведут себя в момент потери устойчивости как вполне жесткие, так что каждый из пролетов балки изгибается по полуволне синусоиды. Критическая сила при этом равна эйлеровой и аргумент равен $u=\pi$. Дальнейшее возрастание коэффициента упругости γ не увеличивает устойчивости системы, поэтому значение γ_0 , соответствующее значению аргумента $u=\pi$, назовем, как и ранее, предельным.

Для разыскания предельных значений коэффициента упругости примем во внимание, что при $u=\pi$ критерий потери устойчивости должен быть одинаков для рассматриваемой неразрезной балки и для шарнирной цепи стержней на упругих опорах. Воспользовавшись результатами задачи 14 а, находим

$$\left. \begin{aligned} \Phi_n(\pi) &= 1 + \cos \frac{2\pi}{2n+1}; \\ m_0 &= 2\pi^2 \left(1 + \cos \frac{2\pi}{2n+1} \right). \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Значения $\Phi_n(0)$, $\Phi_n(\pi)$ и m_0 приведены в табл. 22.

Ниже рассматриваются частные случаи задачи при числе пролетов $n=2, 3$ и 4.

Задача 25 (частный случай задачи 24). Двухпролетная балка на одной жесткой и двух упругих опорах (рис. 108).

Для решения задачи воспользуемся методом деформаций, принимая в качестве основной системы балку с неподвижными опорами. При сдвиге $\delta_1 = 1$ угол поворота на опоре $\varphi_1 = 0$, следовательно:

$$r_{11} = 2L_6; \quad r_{12} = -L_6.$$

Здесь и в дальнейшем аргумент u опущен, т. е. написано просто L_i вместо $L(u)$.

При смещении $\delta_2 = 1$ угол поворота φ_1 уже не равен нулю. Величина этого угла определяется из уравнения

$$2L_5 \varphi_1 - L_6 = 0,$$

откуда

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, находим

$$r_{22} = L_6 - \frac{1}{2} L_5 \quad \text{и} \quad r_{21} = -L_6.$$

Критерий потери устойчивости записывается в виде

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2L_6 + m - L_6 & \\ -L_6 & L_6 - \frac{1}{2} L_5 + m \end{vmatrix} = 0,$$

где параметр нулевой размерности m определяется соотношением (59).

Развертывая определитель, получаем квадратное уравнение относительно m :

$$m^2 + \left(3L_6 - \frac{1}{2} L_5 \right) m - u^2 L_6 = 0, \quad (82)$$

Рис. 108. Двухпролетная балка на упругих опорах (задача 25)

которое определяет две ветви кривой $m(u)$, а следовательно, и две ветви кривой $\Phi_2(u) = \frac{m(u)}{2u^2}$.

График этой функции представлен на рис. 109.

Задача 26 (частный случай задачи 24). Трехпролетная балка на одной жесткой и трех упругих опорах (рис. 110).

Исследование проще всего произвести методом деформаций. Опуская выкладки, дадим окончательные результаты.

Обозначая

$$\left. \begin{aligned} A &= L_1 \frac{L_5}{3L_1 + L_5}; \\ B &= \frac{L_2^2}{L_1} \cdot \frac{L_5}{3L_1 + L_5}; \\ C &= L_2 \frac{L_5}{3L_1 + L_5} \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

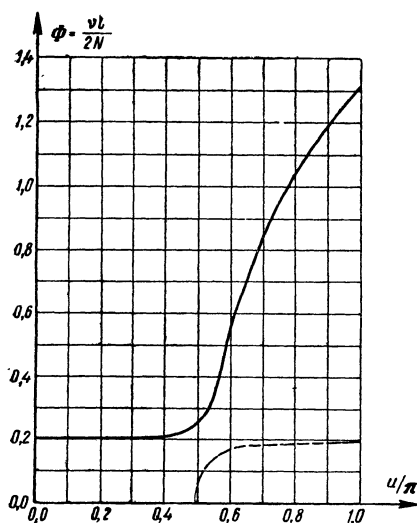


Рис. 109. График функции $\Phi_2(u)$ (задача 25)

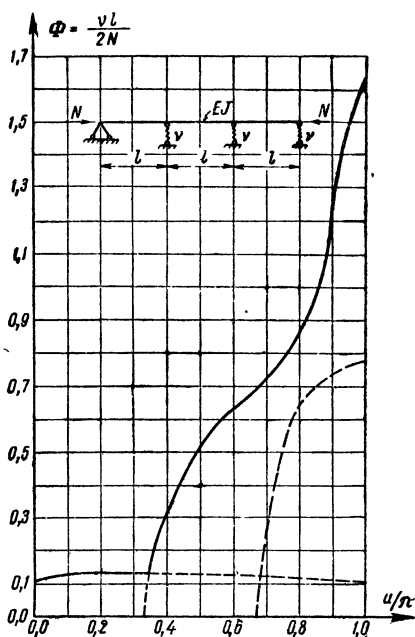


Рис. 110. График функции $\Phi_3(u)$ (задача 26)

и далее

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= L_6^3 + L_6^2(-4A + 3B + 2C) + L_6(-4A^2 - 11AB - \\ &\quad - 16AC + 4BC + 3B^2) + 16A^3 + 8A^2B - 16ABC + \\ &\quad + 32A^2C - 7AB^2 + 2B^2C + B^3; \\ C_1 &= 6L_6^2 + L_6(-4A + 12B + 12C) - \\ &\quad - 24A^2 - 18AB - 48AC + 12BC + 6B^2; \\ C_2 &= 5L_6 + 2A + 5B + 8C, \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

имеем кубическое уравнение для определения параметра m

$$m^3 + C_2 m^2 + C_1 m + C_0 = 0. \quad (85)$$

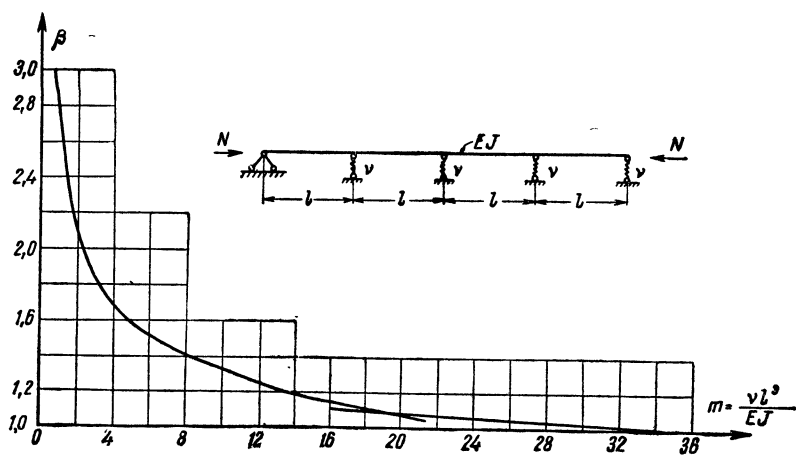


Рис. 111. График $\beta(m)$ для четырехпролетной балки на упругих опорах (задача 27)

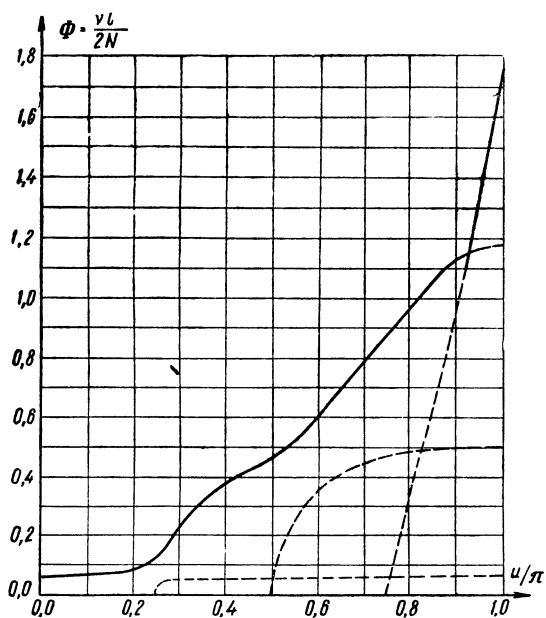


Рис. 112. График функции $\Phi_4(u)$ (задача 27)

График функции $\Phi_3(u)$ представлен на рис. 110.

Задача 27 (частный случай задачи 24). Четырехпролетная балка на одной жесткой и четырех упругих опорах (рис. 111).

Задача сводится к уравнению четвертого порядка относительно параметра m :

$$m^4 + C_3 m^3 + C_2 m^2 + C_1 m + C_0 = 0. \quad (86)$$

Коэффициенты этого уравнения C_i являются функциями аргумента u и имеют довольно сложные аналитические выражения, которые здесь не приводятся.

График функции $\Phi_4(u)$ представлен на рис. 112.

График коэффициента свободной длины β в функции от параметра m дан на рис. 111.

§ 53. ЗАМКНУТАЯ РАМА

Задача 28. Замкнутая рама в виде правильного треугольника. Стержни рамы имеют равную жесткость и сжимаются одинаковыми продольными силами (рис. 113, а).

Исследование устойчивости будем производить при помощи метода де-

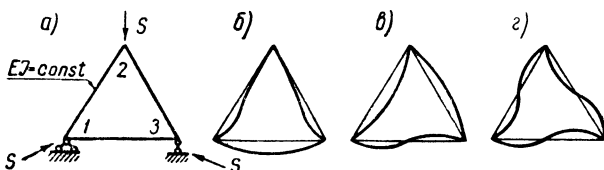


Рис. 113. Замкнутая треугольная рама (задача 28)

формаций. Неизвестными являются углы поворота узлов рамы φ_1 , φ_2 и φ_3 . Канонические уравнения метода деформаций записываются в виде

$$2L_1 \varphi_1 + L_2 \varphi_2 + L_2 \varphi_3 = 0;$$

$$L_2 \varphi_1 + 2L_1 \varphi_2 + L_2 \varphi_3 = 0;$$

$$L_2 \varphi_1 + L_2 \varphi_2 + 2L_1 \varphi_3 = 0.$$

Условием потери устойчивости является равенство нулю определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2L_1 & L_2 & L_2 \\ L_2 & 2L_1 & L_2 \\ L_2 & L_2 & 2L_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (87)$$

Раскрывая определитель, находим

$$\Delta = (2L_1 - L_2) (4L_1^2 + 2L_1 L_2 - 2L_2^2). \quad (88)$$

Корни этого уравнения, содержащиеся в первом множителе, соответствуют состоянию симметричной деформации рамы (рис. 113, б). Действительно, полагая $\varphi_3 = -\varphi_1$, $\varphi_2 = 0$, из канонических уравнений получаем

$$\Delta' = 2L_1 - L_2 = 0.$$

Второй множитель характеризует антисимметричную деформацию рамы (рис. 113, в и г). В этом случае $\varphi_3 = \varphi_1$; относительно угла φ_2 заранее мы не можем высказать никаких ограничительных предположений: он может

быть положительным, отрицательным или равным нулю. Канонические уравнения для случая антисимметричной деформации дают

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} 2L_1 + L_2 & L_2 \\ 2L_2 & 2L_1 \end{vmatrix} = 4L_1^2 + 2L_1 L_2 - 2L_2^2 = 0.$$

Очевидно, что детерминант Δ можно получить как произведение детерминантов Δ' и Δ'' , т. е.

$$\Delta = \Delta' \Delta'',$$

и, следовательно, все корни уравнения $\Delta=0$ можно найти, рассматривая в отдельности состояния симметричной и антисимметричной деформаций рамы.

Замечаем далее, что определитель Δ'' может быть разложен на множители:

$$\Delta'' = 2(2L_1 - L_2)(L_1 + L_2) = 0.$$

Здесь первый множитель соответствует состоянию (рис. 113, в), когда угол поворота $\varphi_2 = -2\varphi_1$. Определяющее критическую силу уравнение $2L_1 - L_2 = 0$ совпадает с уравнением, полученным для случая симметричной деформации. Наконец, корни второго множителя $L_1 + L_2 = 0$ соответствуют деформации (рис. 113, г), при которой все три угла поворота равны между собой:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3.$$

Полученные результаты показывают, что критическая сила определяется наименьшим из корней двух уравнений:

$$1) L_1 + L_2 = 0; \quad 2) 2L_1 - L_2 = 0.$$

Первое уравнение дает

$$u = 2\pi,$$

из второго получаем

$$u = 1,228\pi,$$

следовательно:

$$N_K = (1,228\pi)^2 \frac{EJ}{l^2} = 14,88 \frac{EJ}{l^2}. \quad (89)$$

Для коэффициента свободной длины получаем $\beta = 0,814$. Деформация потерявшей устойчивость рамы будет симметричной (рис. 113, б) или же антисимметричной (рис. 113, в). Обе формы потери устойчивости равновозможны.

Задача 29. Замкнутая прямоугольная рама с опорными закреплениями, препятствующими смещению ее узлов. Параллельные элементы рамы обладают одинаковой жесткостью и сжимаются равными продольными силами (рис. 114).

Система имеет две оси симметрии. Решающей будет симметричная форма потери устойчивости, при которой углы поворота удовлетворяют условию

$$\varphi_1 = \varphi_3 = -\varphi_2 = -\varphi_4.$$

В силу симметрии деформации в середине каждого из стержней рамы угол поворота равен нулю; нулю равна также и поперечная сила в этих точках. Поэтому мы можем ограничиться исследованием выделенного из рамы Г-образного элемента из стержней половинной длины $\frac{l_1}{2}$ и $\frac{l_2}{2}$, имеющих на концах подвижную заделку (рис. 114).

Принимаем в качестве параметров отношения

$$k = \frac{J_2 l_1}{J_1 l_2}; \quad n = \frac{N_2 l_2}{N_1 l_1}, \quad (90)$$

тогда критерий потери устойчивости записывается в виде

$$L_7 \left(\frac{u_1}{2} \right) + k L_7 \left(\frac{u_2}{2} \right) = 0,$$

откуда

$$k = - \frac{L_7 \left(\frac{u_1}{2} \right)}{L_7 \left(\frac{u_2}{2} \right)}. \quad (91)$$

Здесь u_1 — аргумент для вертикального;
 u_2 — аргумент для горизонтального стержня.

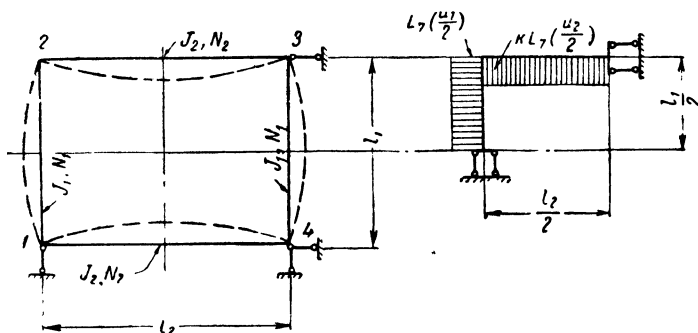


Рис. 114. Замкнутая прямоугольная рама без сдвига (задача 29)

Из соотношений (90) следует

$$n = k \left(\frac{u_2}{u_1} \right)^2. \quad (92)$$

Решение задачи проще всего изобразить в виде семейства изостаб в прямоугольной системе координат kOn . Рис. 115 содержит такие изостаб для случая, когда $k > n$. Если окажется, что $k < n$, то следует изменить нумерацию стержней.

После того как значение коэффициента свободной длины β_1 найдено по графику, коэффициент свободной длины β_2 вычисляется по формуле

$$\beta_2 = \sqrt{\frac{k}{n}} \beta_1. \quad (93)$$

Задача 30. Замкнутая прямоугольная рама со смещением. Параллельные элементы рамы обладают одинаковой жесткостью и сжимаются равными продольными силами (рис. 116).

В силу симметрии системы деформация в момент потери устойчивости будет или симметричной или же антисимметричной. Каждую из этих форм потери устойчивости следует рассмотреть в отдельности. В первом случае — при симметричной деформации — сдвиг не будет иметь места, и задача сводится к исследованию устойчивости рамы без сдвига, т. е. к задаче 29.

Исследуем антисимметричную деформацию. Выделим из рамы Г-образный элемент, образованный стержнями половинной длины (рис. 116). Используем в качестве основной системы стержень, одним концом шарнирно опертый и имеющий на другом конце подвижную заделку. Тогда будем

иметь одно лишнее неизвестное — угол поворота узла φ_1 , и критерий потери устойчивости примет вид

$$L_9 \left(\frac{u_1}{2} \right) - k L_5 \left(\frac{u_2}{2} \right) = 0.$$

Отсюда находим

$$k = \frac{L_9 \left(\frac{u_1}{2} \right)}{L_5 \left(\frac{u_2}{2} \right)}. \quad (94)$$

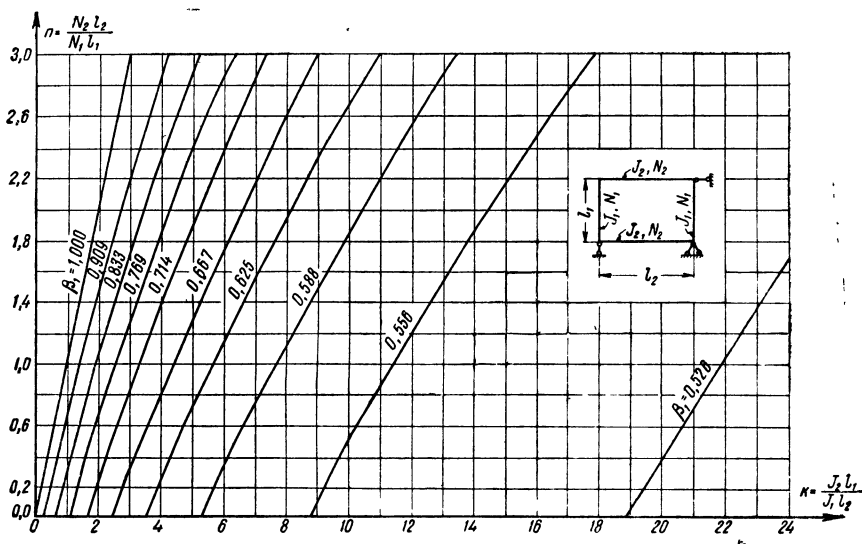


Рис. 115. Изостабь для замкнутой прямоугольной рамы без смещения узлов (задача 29)

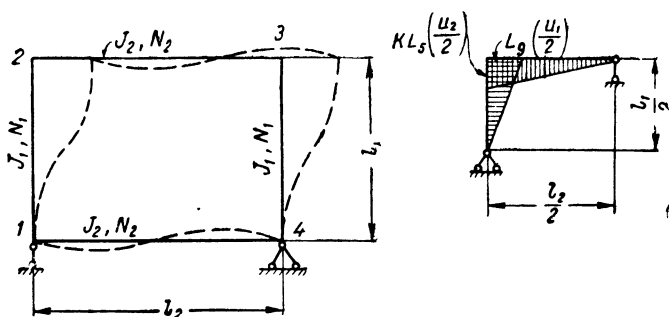


Рис. 116. Замкнутая прямоугольная рама (задача 30)

Изоσταбы даны на рис. 117.

Помимо изостаб, соответствующих случаю антисимметричной деформации рамы, на графике нанесены построенные на основе уравнения (91) изостабы для случая симметричной деформации рамы. Оказывается, что при

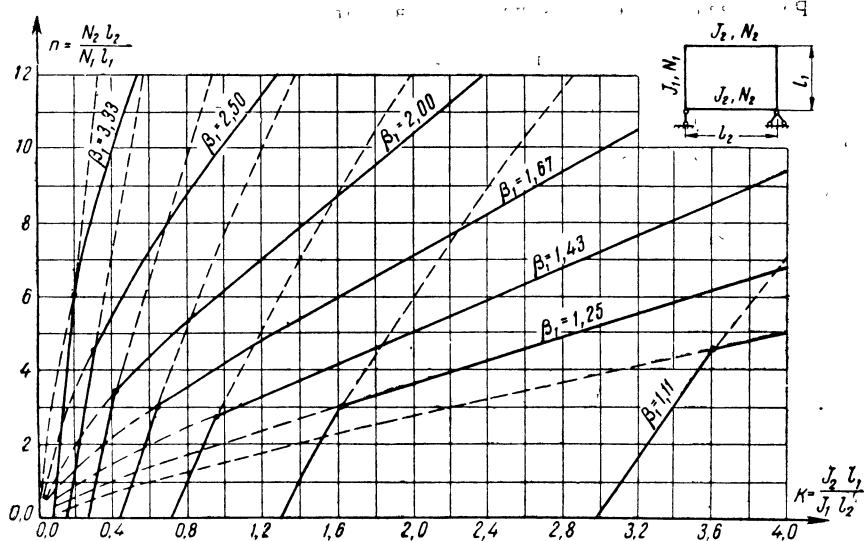


Рис. 117. Изостабы для замкнутой прямоугольной рамы (задача 30)

малых значениях n решающей является антисимметричная деформация, при больших, наоборот, симметричная деформация рамы. Поэтому каждая изостаба состоит из двух пересекающихся под некоторым углом ветвей. Нижняя ветвь соответствует антисимметричной деформации рамы, верхняя ветвь — симметричной.

§ 54. ОДНОПРОЛЕТНАЯ РАМА

Задача 31. Однопролетная рама, у которой одна из стоек оперта неподвижно, а опора второй стойки допускает горизонтальное перемещение (рис. 118).

Пусть будет EJ_c — равные жесткости каждой из стоек; EJ_p — жесткость ригеля; h — высота стоек; l — пролет ригеля. Обозначим через N_1 и N_2 сжимающие силы в стойках рамы, причем будем предполагать, что $N_1 > N_2$.

Здесь, как и во всех последующих задачах, влиянием продольных усилий в ригеле будем пренебрегать.

Рассматриваемая рама является статически определимой. Наиболее просто решение задачи достигается при помощи метода деформаций, если применять в качестве элементов основной системы стержни, имеющие на одном конце шарнир, а на другом — подвижную заделку. Лишними неизвестными в этом случае будут служить углы поворота узлов рамы φ_1 и φ_2 . Соответствующие единичным состояниям эпюры моментов изображены на рис. 118, и критерий потери устойчивости имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4k - L_9(u_1) & 2k \\ 2k & 4k - L_9(u_2) \end{vmatrix} = 0,$$

где параметр нулевой размерности k определяется формулой

$$k = \frac{J_p h}{J_c l} . \quad (95)$$

Раскрывая определитель, получаем квадратное уравнение относительно k

$$12k^2 - 4[L_0(u_1) + L_0(u_2)k + L_0(u_1)L_0(u_2)] = 0. \quad (96)$$

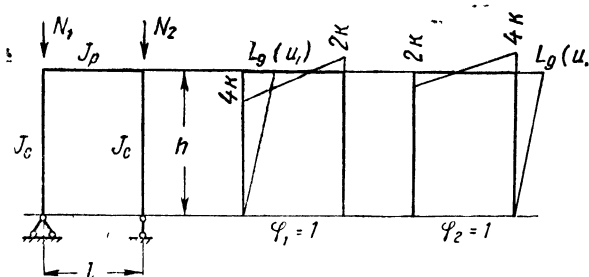


Рис. 118. Однопролетная рама с шарнирно опертými стойками (задача 31)

Далее необходимо ввести параметр, характеризующий отношение сжимающих сил в стойках рамы. Примем

$$n = \frac{N_2}{N_1} ; \quad (97)$$

очевидно, что $0 \leq n \leq 1$.

Рис. 119 содержит изостабы для более нагруженной стойки. После того как значение β_1 найдено по графику, значение коэффициента свободной

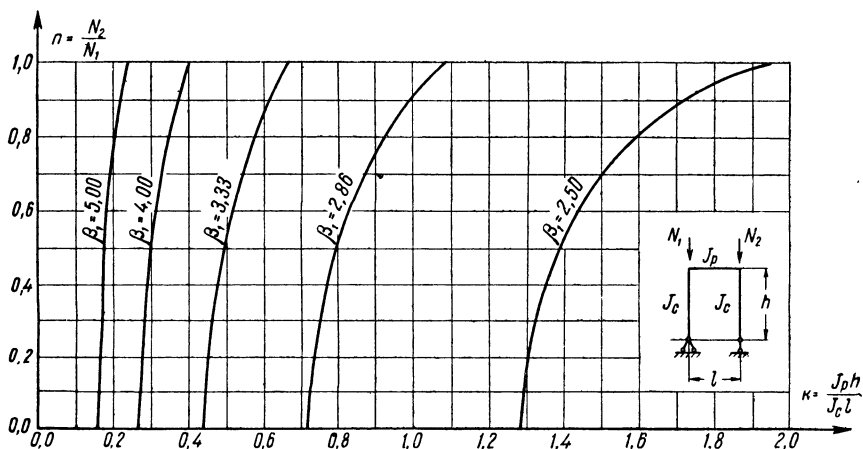


Рис. 119. Изостабы для однопролетной рамы с шарнирно опертými стойками (задача 31)

длины для второй стойки β_2 определяется по формуле

$$\beta_2 = \frac{\beta_1}{\sqrt{n}}. \quad (98)$$

Задача 32. Однопролетная рама с шарнирно опертыми стойками (рис. 120).

Сохраняя обозначения предыдущей задачи и принимая в качестве неизвестных углы поворота узлов рамы φ_1 и φ_2 и смещение δ , получаем критерий потери устойчивости в виде

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_5(u_1) + 4k & 2k & L_5(u_1) \\ 2k & L_5(u_2) + 4k & L_5(u_2) \\ L_5(u_1) & L_5(u_2) & L_6(u_1) + L_6(u_2) \end{vmatrix} = 0.$$

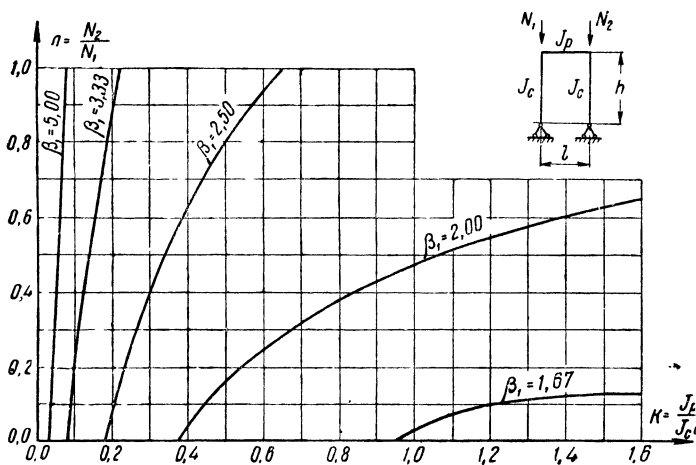


Рис. 120. Изостабы для однопролетной рамы с шарнирно опертыми стойками (задача 32)

Этот определитель приводится к форме квадратного уравнения относительно параметра k :

$$a_2 k^2 + a_1 k + a_0 = 0, \quad (99)$$

коэффициенты которого являются функциями аргументов u_1 и u_2 , именно

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= 12 [L_6(u_1) + L_6(u_2)]; \\ a_1 &= 12 L_5(u_1) L_5(u_2) - 4 (u_1^2 + u_2^2) [L_5(u_1) + L_5(u_2)]; \\ a_0 &= - (u_1^2 + u_2^2) L_5(u_1) L_5(u_2). \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

Изостабы для более нагруженной стойки даны на рис. 120.

Коэффициент свободной длины для второй стойки β_2 определяется по формуле (98).

Задача 33. Однопролетная рама без сдвига с шарнирно опертыми стойками (рис. 121).

Сохраняя обозначения предыдущих задач, получаем критерий потери устойчивости в виде

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_5(u_1) + 4k & 2k \\ 2k & L_5(u_2) + 4k \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, приходим к квадратному уравнению относительно параметра k :

$$12k^2 + 4[L_5(u_1) + L_5(u_2)]k + L_5(u_1)L_5(u_2) = 0. \quad (101)$$

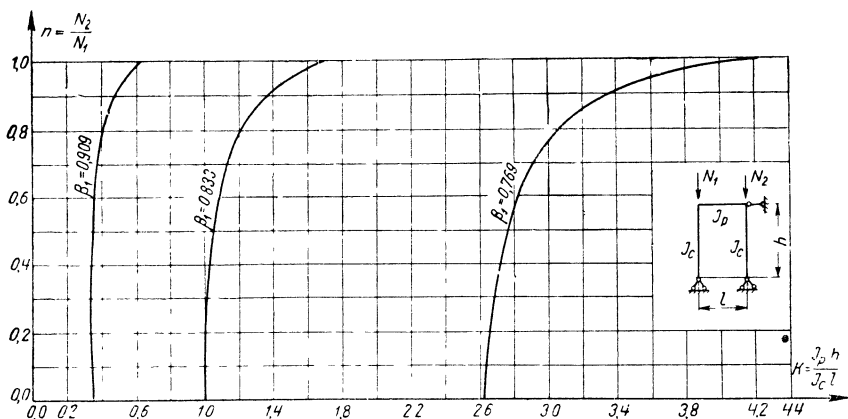


Рис. 121. Изостабы для однопролетной рамы с шарнирно опертыми стойками (задача 33)

По этому уравнению построен график (рис. 121), содержащий изостабы для более нагруженной стойки. Для вычисления β_2 служит формула (98).

Задача 34. Однопролетная рама, у которой одна стойка зашцеplена неподвижно, а вторая стойка имеет в основании подвижную заделку (рис. 122).

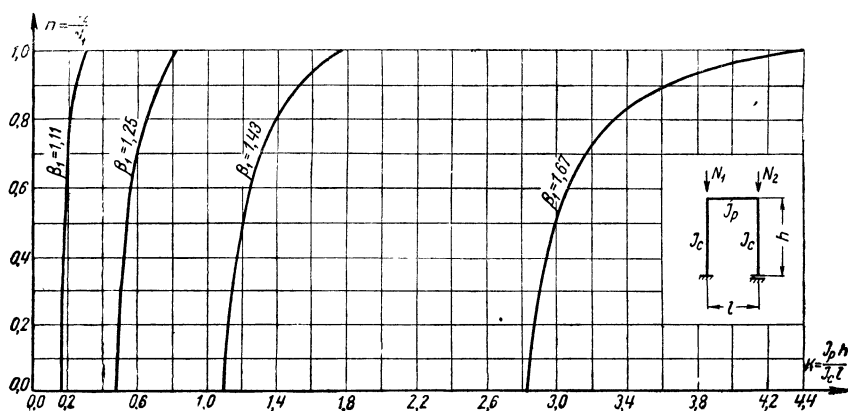


Рис. 122. Изостабы для однопролетной рамы с зашцеplенными стойками (задача 34)

При обозначениях предыдущих задач имеем критерий потери устойчивости в виде

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_7(u_1) + 4k & 2k \\ 2k & L_7(u_2) + 4k \end{vmatrix} = 0.$$

Здесь в качестве элемента основной системы использован стержень с подвижной заделкой.

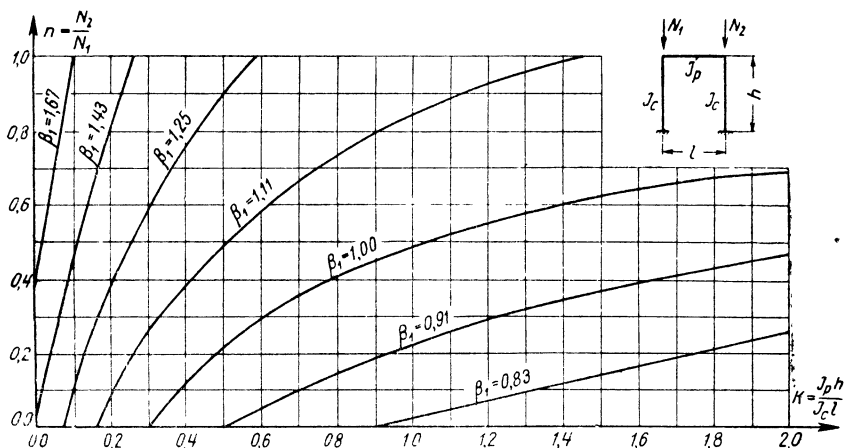


Рис. 123. Изоасты для однопролетной рамы с защемленными стойками (задача 35)

Раскрывая определитель, получаем квадратное уравнение относительно параметра k :

$$12k^2 + 4[L_7(u_1) + L_7(u_2)]k + L_7(u_2)L_7(u_2) = 0. \quad (102)$$

Изоасты даны на рис. 122. Для вычисления коэффициента свободной длины второй стойки β служит формула (98).

Задача 35. Однопролетная рама с защемленными стойками (рис. 123).

Неизвестные метода деформации — углы поворота узлов рамы φ_1 и φ_2 и сдвиг δ . Критерий потери устойчивости имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_1(u_1) + 4k & 2k & L_3(u_1) \\ 2k & L_1(u_2) + 4k & L_3(u_2) \\ L_3(u_1) & L_3(u_2) & L_4(u_1) + L_4(u_2) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем квадратное уравнение относительно k вида (99), коэффициенты которого равны

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= 12[L_4(u_1) + L_4(u_2)]; \\ a_1 &= 4\{L_1(u_1)[L_6(u_1) + L_4(u_2)] + L_1(u_2)[L_6(u_2) + \\ &\quad + L_4(u_1)] + L_3(u_1)L_3(u_2)\}; \\ a_0 &= L_1(u_1)L_1(u_2)[L_6(u_1) + L_6(u_2)]. \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

Изографы представлены на рис. 123. Для определения коэффициента свободной длины более нагруженной стойки β_1 может служить простая приближенная формула

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{1+n}{2}} \left(1 + \frac{1}{1+5k} \right). \quad (104)$$

Погрешность этой формулы не превышает 1%, поэтому она заслуживает самого широкого распространения.

Коэффициент свободной длины для менее нагруженной стойки определяется по формуле (98).

Приближенную формулу (104) можно записать в виде

$$\beta = \sqrt{\frac{\Sigma N}{2N}} \left(1 + \frac{1}{1+5k} \right), \quad (105)$$

где ΣN — сумма сжимающих сил в обеих стойках рамы;

N — сжимающая сила в рассматриваемой стойке.

В этом виде формула становится пригодной для определения свободной длины каждой из стоек, и отпадает необходимость пользоваться формулой (98).

55. ДВУХПРОЛЕТНАЯ И ТРЕХПРОЛЕТНАЯ РАМЫ

Задача 36. Двухпролетная рама с шарнирно опертыми стойками. Высота и жесткость всех трех стоек одинаковы; пролеты рамы равны; жесткость ригеля постоянна (рис. 124).

Обозначим:

l — длина каждого из пролетов;

h — высота стойки;

J_p — момент инерции поперечного сечения ригеля;

J_c — момент инерции поперечного сечения стойки;

N_1, N_2, N_3 — сжимающие силы в стойках;

u_1, u_2, u_3 — аргументы для стоек.

Влиянием продольных усилий в ригеле пренебрегаем.

Основным параметром служит отношение погонных жесткостей ригеля и стоек

$$k = \frac{J_p h}{J_c l}. \quad (106)$$

При решении задачи методом деформаций имеем четыре неизвестных: углы поворота $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и сдвиг $\delta = 1$. Критерий потери устойчивости содержит определитель четвертого порядка:

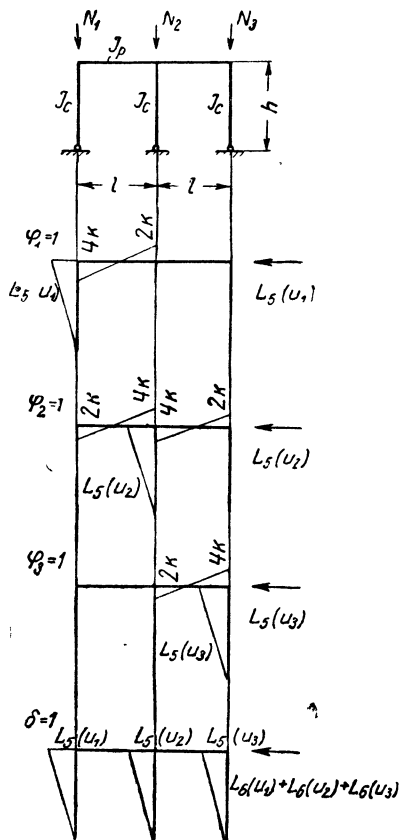


Рис. 124. Двухпролетная рама с шарнирно опертыми стойками (задача 36)

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_5(u_1) + 4k & 2k & 0 & L_5(u_1) \\ 2k & L_5(u_2) + 8k & 2k & L_5(u_2) \\ 0 & 2k & L_5(u_3) + 4k & L_5(u_3) \\ L_5(u_1) & L_5(u_2) & L_5(u_3) & L_6(u_1) + L_6(u_2) + L_6(u_3) \end{vmatrix} = 0.$$

Решение этого уравнения не может быть представлено в компактной форме, так как потребуются ввести еще два параметра, выражающих отношение сжимающих сил в стойках. Поэтому ограничимся рассмотрением ча-

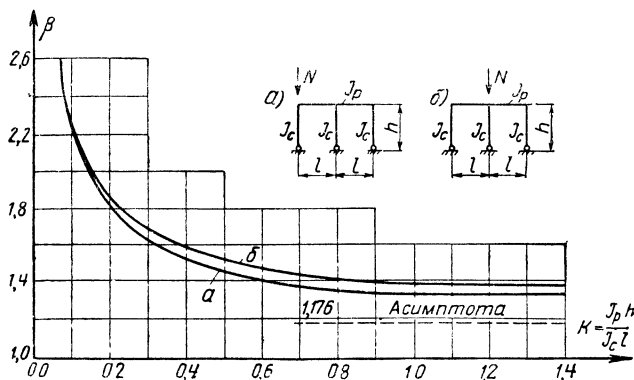


Рис. 125. График $\beta(k)$ для двухпролетной рамы с шарнирно опертыми стойками: сжата одна стойка (задача 36)

стных случаев, когда сжимающая сила в каждой из стоек или равна N или же вообще отсутствует. Аргумент для каждой стойки будет равен или u или же нулю.

Случай «а». Сжата одна крайняя стойка. Полагая $u_1=u$, $u_2=u_3=0$, приводим критерий потери устойчивости к виду

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_5 + 4k & 2k & 0 & L_5 \\ 2k & 8k + 3 & 2k & 3 \\ 0 & 2k & 4k + 3 & 3 \\ L_5 & 3 & 3 & L_6 + 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем кубическое уравнение относительно k :

$$a_3 k^3 + a_2 k^2 + a_1 k + a_0 = 0, \quad (107)$$

коэффициенты которого являются функциями аргумента u , именно

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= 96L_6 + 576; \\ a_2 &= 132L_6 + 192L_5 + 28L_5(L_6 - L_5) + 540; \\ a_1 &= 36L_5(L_6 - L_5) + 180L_5 + 36L_6; \\ a_0 &= 9L_5(L_6 - L_5). \end{aligned} \right\} \quad (108)$$

График $\beta(k)$ изображен на рис. 125 (нижняя кривая).

Случай «б». Сжата одна средняя стойка. Имеем $u_1=u_3=0$ и $u_2=u$. В силу антисимметричного характера деформации $\varphi_1 = \varphi_3$ и критерий потери устойчивости принимает вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4k+3 & 2k & 3 \\ 4k & L_5+8k & L_5 \\ 6 & L_5 & L_6+6 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем квадратное уравнение относительно k

$$a_2 k^2 + a_1 k + a_0 = 0, \quad (107)$$

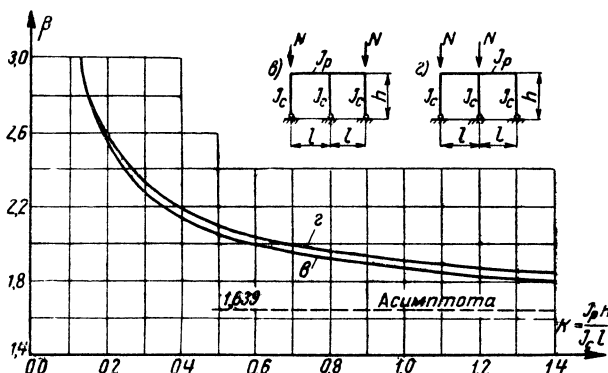


Рис. 126. График $\beta(k)$ для двухпролетной рамы с шарнирно опертыми стойками; сжаты две стойки (задача 36)

коэффициенты которого равны

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= 24L_6 + 144; \\ a_1 &= 48L_5 + 24L_6 + 4L_5(L_6 - L_5); \\ a_0 &= 3L_5(L_6 - L_5). \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

График $\beta(k)$ изображен на рис. 125 (верхняя кривая).

Случай «в». Сжаты две крайние стойки. В этом случае имеем $u_1 = u_3 = u$ и $u_2 = 0$. Решающей является антисимметричная деформация $\varphi_1 = \varphi_3$. Критерий потери устойчивости

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_5 + 4k & 2k & L_5 \\ 4 & 8k + 3 & 3 \\ 2L_5 & 3 & 2L_6 + 3 \end{vmatrix} = 0$$

приводится к квадратному уравнению относительно k вида (109), в котором

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= 24L_6 + 36; \\ a_1 &= 12L_6 + 24L_5 + 8L_5(L_6 - L_5); \\ a_0 &= 3L_5(L_6 - L_5). \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

График $\beta(k)$ изображен на рис. 126 (нижняя кривая).

Случай «г». Сжаты две смежные стойки. Имеем $u_1 = u_2 = u$ и $u_3 = 0$. Критерий потери устойчивости

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_5 + 4k & 2k & 0 & L_5 \\ 2k & L_5 + 8k & 2k & L_5 \\ 0 & 2k & 4k + 3 & 3 \\ L_5 & L_5 & 3 & 2L_6 + 3 \end{vmatrix} = 0$$

после раскрытия определителя принимает форму кубического уравнения (107), коэффициенты которого равны

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= 96L_6 + 144; \\ a_2 &= 84L_6 + 78L_5 + 44L_5 L_6 - 14L_5^2; \\ a_1 &= 36L_5 L_6 + 4L_5^2 (L_6 - L_5); \\ a_0 &= 3L_5^2 (L_6 - L_5). \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

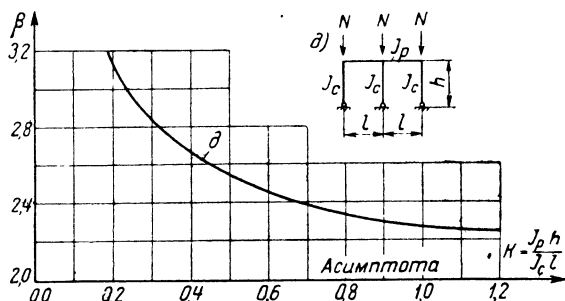


Рис. 127. График $\beta(k)$ для двухпролетной рамы с шарнирно опертыми стойками; сжаты все три стойки (задача 36)

График $\beta(k)$ изображен на рис. 126 (верхняя кривая).

Случай «д». Сжаты все три стойки рамы. Полагая $u_1 = u_2 = u_3 = u$, получаем критерий потери устойчивости

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_5 - 4k & 2k & L_5 \\ 4k & L_5 + 8k & L_5 \\ 2L_5 & L_5 & 3L_6 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем квадратное уравнение относительно параметра k

$$24L_6 k^2 + (12L_6 - 4L_5) L_5 k + L_5^2 (L_6 - L_5) = 0. \quad (113)$$

График $\beta(k)$ изображен на рис. 127.

Задача 37. Двухпролетная рама с защемленными стойками. Высота и жесткость всех трех стоек одинаковы; пролеты рамы равны; жесткость ригеля постоянна (рис. 128).

Сохраняя обозначения предыдущей задачи, получаем критерий потери устойчивости в виде

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_1(u_1) + 4k & 2k & 0 & L_3(u_1) \\ 2k & L_1(u_2) + 8k & 2k & L_3(u_2) \\ 0 & 2k & L_1(u_3) + 4k & L_3(u_3) \\ L_3(u_1) & L_3(u_2) & L_3(u_3) & L_4(u_1) + L_4(u_2) + L_4(u_3) \end{vmatrix} = 0.$$

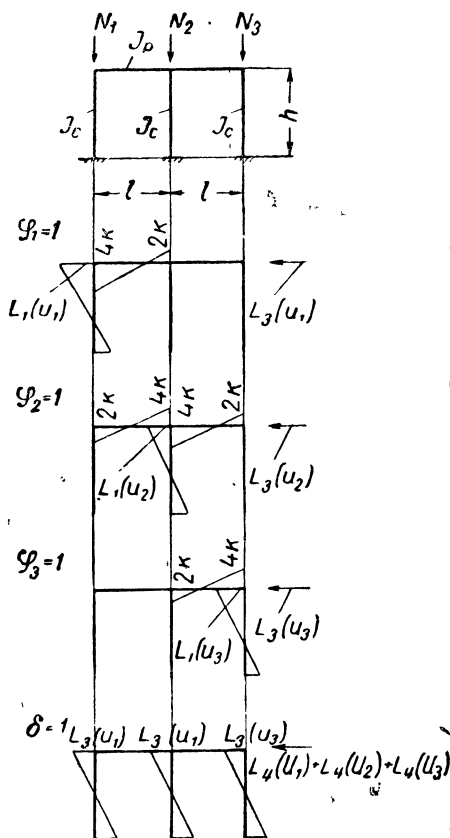


Рис. 128. Двухпролетная рама с защемленными стойками (задача 37)

Решение этого уравнения в общем виде весьма затруднительно, поэтому мы ограничимся изучением ряда частных случаев, как это было сделано в предыдущей задаче.

Случай «а». Сжата одна крайняя стойка. Полагая $u_1 = u$, $u_2 = u_3 = 0$, приводим критерий потери устойчивости к виду

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_1 + 4k & 2k & 0 & L_3 \\ 2k & 8k + 4 & 2k & 6 \\ 0 & 2k & 4k + 4 & 6 \\ L_3 & 6 & 6 & L_4 + 24 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем после преобразований кубическое уравнение относительно параметра k в форме (107).

Коэффициенты этого уравнения равны

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= 24L_4 + 576; \\ a_2 &= 7L_1L_6 + 168L_1 + 12L_3 + 44L_4 + 804; \\ a_1 &= 12L_1L_6 + 216L_1 + 24L_3 + 16L_4 + 96; \\ a_0 &= 4L_1L_6 + 24L_1. \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

График $\beta(k)$ изображен на рис. 129 (сплошная линия).

Случай «б». Сжата одна средняя стойка. Здесь следует положить $u_1 = u_3 = 0$ и $u_2 = u$. В силу антисимметричного характера деформации $\varphi_1 = \varphi_3$ и критерий потери устойчивости принимает вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4k + 4 & 2k & 6 \\ 4k & L_1 + 8k & L_3 \\ 12 & L_3 & L_4 + 24 \end{vmatrix} = 0.$$

После преобразований получаем квадратное уравнение относительно k вида (109), где

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= 6L_4 + 144; \\ a_1 &= L_1L_6 + 24L_1 + 12L_3 + 8L_4 + 48; \\ a_0 &= L_1L_6 + 6L_1. \end{aligned} \right\} \quad (115)$$

График $\beta(k)$ изображен на рис. 129 (пунктирная линия).

Случай «в». Сжаты две крайние стойки. Имеем $u_1=u_3=u$ и $u_2=0$. Деформация антисимметрична, поэтому $\varphi_1=\varphi_3$.

Критерий потери устойчивости записывается в форме

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_1 + 4k & 2k & L_3 \\ 4k & 8k + 4 & 6 \\ 2L_3 & 6 & 2L_4 + 12 \end{vmatrix} = 0.$$

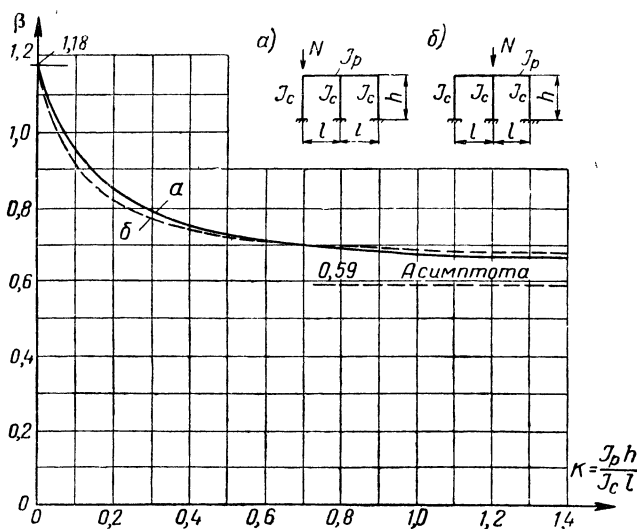


Рис. 129. График $\beta(k)$ для двухпролетной рамы с защемленными стойками; сжата одна стойка (задача 37)

Отсюда получаем квадратное уравнение вида (109), в котором

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= 12L_4 + 72; \\ a_1 &= 4L_1 L_6 + 24L_1 + 12L_3 + 8L_4 + 12; \\ a_0 &= 2L_1 L_6 + 3L_1. \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

График $\beta(k)$ изображен на рис. 130 (сплошная линия).

Случай «г». Сжаты две смежные стойки. В этом случае $u_1=u_2=u$ и $u_3=0$.

Критерий потери устойчивости

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_1 + 4k & 2k & 0 & L_3 \\ 2k & L_1 + 8k & 2k & L_3 \\ 0 & 2k & 4k + 4 & 6 \\ L_3 & L_3 & 6 & 2L_4 + 12 \end{vmatrix} = 0$$

приводится к виду кубического уравнения (107), коэффициенты которого равны

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= 48L_4 + 288; \\ a_2 &= 22L_1 L_4 - 7L_3^2 + 132L_1 + 12L_3 + 56L_4 + 84; \\ a_1 &= 2L_1^2 L_6 + 12L_1^2 + 24L_1 L_4 + 6L_1 L_3 - 8L_3^2 + 36L_1; \\ a_0 &= 2L_1^2 L_6 + 3L_1^2. \end{aligned} \right\} \quad (117)$$

График $\beta(k)$ изображен на рис. 130 (пунктирная линия).

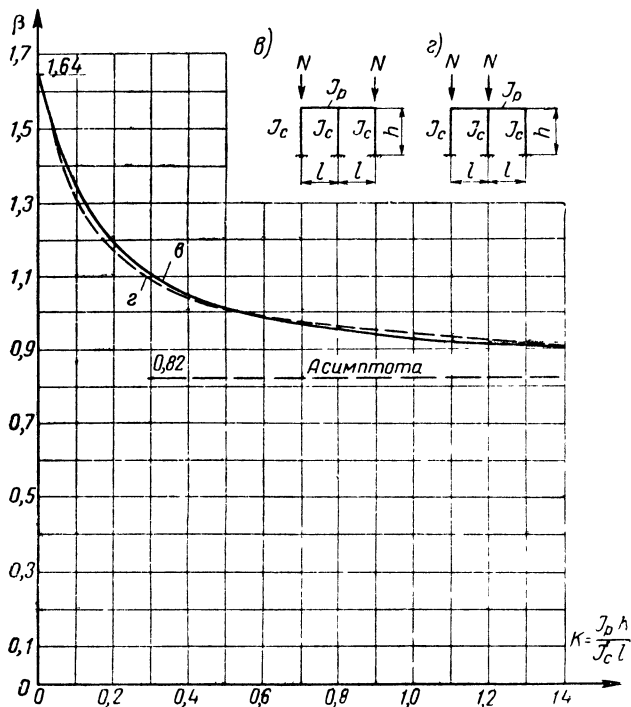


Рис. 130. График $\beta(k)$ для двухпролетной рамы с защемленными стойками; сжаты две стойки (задача 37)

Случай «д». Сжаты все три стойки рамы. Полагая $u_1 = u_2 = u_3 = u$ и принимая во внимание антисимметричный характер деформации рамы, получаем критерий потери устойчивости в виде

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_1 + 4k & 2k & L_3 \\ 4k & L_1 + 8k & L_3 \\ 2L_3 & L_3 & 3L_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, приходим к квадратному уравнению вида (109), в котором

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= 24L_4; \\ a_1 &= 12L_1 L_4 - 4L_3^2; \\ a_0 &= L_1^2 L_6. \end{aligned} \right\} \quad (118)$$

График $\beta(k)$ изображен на рис. 131.

Совокупность полученных графиков (рис. 129, 130, 131) дает возмож-

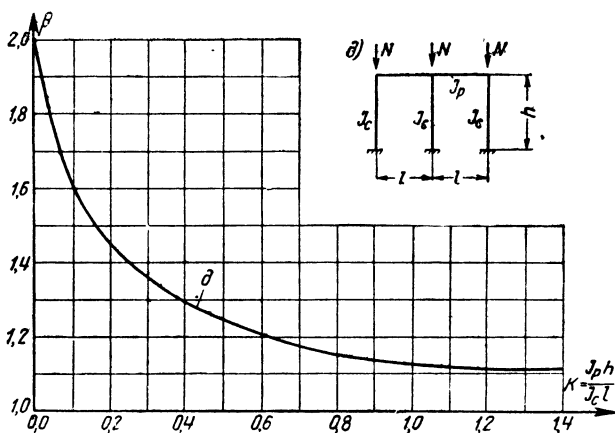


Рис. 131. График $\beta(k)$ для двухпролетной рамы с защемленными стойками; сжаты все три стойки (задача 37)

ность приближенно определить величину коэффициента свободной длины для стоек рамы при любом соотношении сжимающих сил.

Еще проще коэффициент свободной длины определяется по приближенной формуле

$$\beta = \sqrt{\frac{\Sigma N}{3N}} \left(1 + \frac{1}{1 + 6,25k} \right), \quad (119)$$

где ΣN — сумма сжимающих сил во всех трех стойках рамы;

N — сжимающая сила в той стойке, свободная длина которой определяется.

Погрешность этой формулы не превышает 1%.

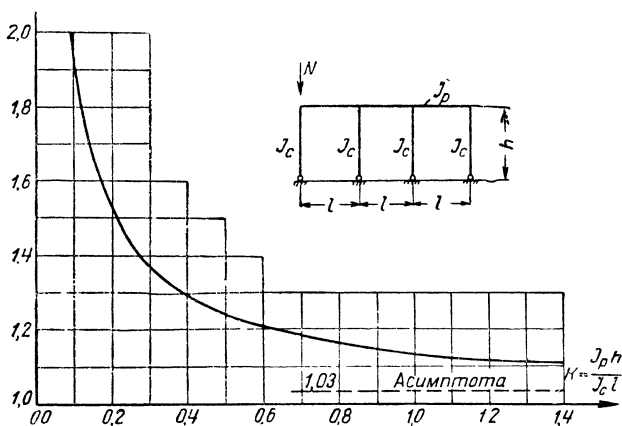


Рис. 132. График $\beta(k)$ для трехпролетной рамы с шарнирно опертыми стойками

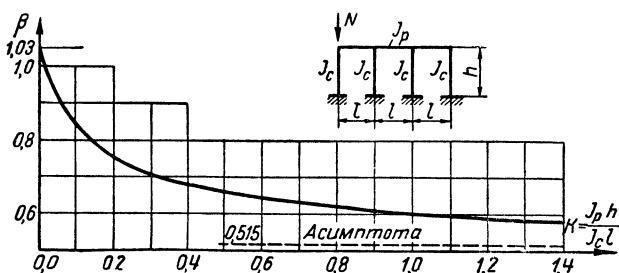


Рис. 133. График $\beta(k)$ для трехпролетной рамы с защемленными стойками

Подобным же образом может быть исследована устойчивость трехпролетной рамы. Графики $\beta(k)$ для частного случая, когда сжата только одна крайняя стойка, даны на рис. 132 и 133.

ЛИТЕРАТУРА¹

1. Б. Г. Галеркин, Собрание сочинений, т. I, изд. Академии наук СССР, 1952.
2. Ф. Гартман, Устойчивость инженерных сооружений, Госстройиздат, 1939.
3. А. Н. Динник, Продольный изгиб, ГОНТИ, 1939; Устойчивость упругих систем, изд. Академии наук СССР, 1950.
4. Н. В. Корноухов, Прочность и устойчивость стержневых систем, Госстройиздат, 1949.
5. С. Н. Никифоров, Устойчивость сжатых стержней сварных ферм, Госстройиздат, 1938.
6. Я. Л. Нудельман, Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем, Гостехиздат, 1949.
7. П. Ф. Папкович, Строительная механика корабля, ч. II, Судпромгиз, 1941.
8. Е. П. Попов, Нелинейные задачи статики тонких стержней, Гостехиздат, 1948.
9. Я. А. Пратусевич, Вариационные методы в строительной механике, Гостехиздат, 1948.
10. И. П. Прокофьев, А. Ф. Смирнов, Теория сооружений, ч. III, Трансжелдориздат, 1948.
11. А. Ф. Смирнов, Статическая и динамическая устойчивость сооружений, Трансжелдориздат, 1947.
12. Н. К. Снитко, Устойчивость стержневых систем, Госстройиздат, 1952.
13. С. П. Тимошенко, Устойчивость упругих систем, Гостехиздат, 1946.
14. И. Я. Штаерман, А. А. Пиковский, Основы теории устойчивости строительных конструкций, Госстройиздат, 1939.
15. Ф. С. Ясинский, Избранные работы по устойчивости сжатых стержней, Гостехиздат, 1952.

¹ Исползованная при составлении книги литература указана в подстрочных сносках к тексту. В приводимом списке перечислены издания монографического характера, которые могут служить пособиями для изучения вопроса.

О Г Л А В Л Е Н И Е

	<i>Стр.</i>
Предисловие	3
Введение. Современное состояние теории устойчивости сжатых стержней и стержневых систем	6

Глава первая. Упругий сжатый стержень

§ 1. Устойчивое и неустойчивое равновесие. Модель. Задача Эйлера. Критическая сила	25
§ 2. Энергетический критерий устойчивости. Свойства потенциальной энергии	31
§ 3. Экстремальный принцип. Вариационная задача	38
§ 4. Дифференциальное уравнение устойчивости. Различные случаи опорных закреплений	39
§ 5. Собственные формы упругой кривой. Конгруэнтность собственных форм. Свободная длина	45
§ 6. Интегральное уравнение устойчивости	49
§ 7. Численное решение дифференциального и интегрального уравнений устойчивости	52
§ 8. Аппроксимирование уравнения упругой кривой. Энергетический метод	53
§ 9. Метод Ритца. Метод Бубнова—Галеркина	57
§ 10. Метод последовательных приближений. Сравнение различных методов	63

Глава вторая. Упругий сжато-изогнутый стержень

§ 11. Сжато-изогнутый стержень. Модель. Дифференциальное уравнение задачи	66
§ 12. Прогибы и моменты сжато-изогнутого стержня	71
§ 13. Обобщение полученных результатов. Приближенный метод расчета	78
§ 14. Специальные методы интегрирования дифференциального уравнения. Метод начальных параметров	82

Глава третья. Упруго-пластический сжато-изогнутый стержень

§ 15. Идеальный упруго-пластический материал. Три стадии работы	87
§ 16. Дифференциальные уравнения изгиба для случая прямоугольного поперечного сечения	92
§ 17. Внецентренно сжатый стержень прямоугольного сечения. Формы равновесия	98

§ 18. Аналитический критерий потери устойчивости для упруго-пластического сжато-изогнутого стержня	109
§ 19. Внецентренно сжатый стержень прямоугольного сечения. Критическое напряжение	114
§ 20. Сжато-изогнутый стержень прямоугольного сечения. Сосредоточенная сила в середине пролета. Равномерно распределенная нагрузка	118
§ 21. Приближенный метод исследования устойчивости внецентренно сжатого стержня	121
§ 22. Устойчивость внецентренно сжатого стержня произвольной формы поперечного сечения	123

Глава четвертая. Стальной сжатый и сжато-изогнутый стержень

§ 23. Механические свойства строительной стали	128
§ 24. Устойчивость центрально сжатого стержня. Теория Энгессера—Ясинского	133
§ 25. Критическое напряжение для центрально сжатого стержня	138
§ 26. Равновесие между внешними усилиями и напряжениями при неупругой работе стали	141
§ 27. Устойчивость сжато-изогнутого стержня. Метод численного интегрирования	145
§ 28. Приближенные методы исследования устойчивости внецентренно сжатого стержня	153

Глава пятая. Расчет стального сжатого и сжато-изогнутого стержня

§ 29. Коэффициент запаса при расчете стальных конструкций	163
§ 30. Обоснование методики расчета центрально сжатого стержня	168
§ 31. Расчет центрально сжатого стержня по действующим нормам	174
§ 32. Обоснование методики расчета сжато-изогнутого стержня	176
§ 33. Основная формула расчета сжато-изогнутого стержня	186
§ 34. Расчет сжато-изогнутого стержня по действующим нормам	191
§ 35. Другие формулы расчета сжато-изогнутого стержня	194
§ 36. Гибкость стержня. Заключительные замечания	198

Глава шестая. Конечные деформации сжатого и сжато-изогнутого стержня

§ 37. Нелинейная трактовка задачи. Модель упругой устойчивости	200
§ 38. Упругая работа центрально и внецентренно сжатого стержня	205
§ 39. Упруго-пластическая работа центрально и внецентренно сжатого стержня	209
§ 40. Классификация явлений потери устойчивости	212

Глава седьмая. Общие методы исследования устойчивости стержневых систем

§ 41. Обобщение эйлеровой задачи	216
§ 42. Предпосылки развития общих методов	221
§ 43. Формула Мора для перемещений	223
§ 44. Метод сил	229
§ 45. Уравнение трех моментов	233
§ 46. Метод деформаций	238
§ 47. Техника решения задач устойчивости	246

Глава восьмая. Устойчивость стержневых систем

	<i>Стр.</i>
§ 48. Стержень с консолью. Стержень с упругими закреплениями. Пересекающиеся раскосы	250
§ 49. Шарнирная цепь стержней на упругих опорах	261
§ 50. Неразрезная балка на жестких опорах	268
§ 51. Неразрезная балка на крайних жестких и промежуточных упругих опорах	275
§ 52. Неразрезная балка на одной жесткой и прочих упругих опорах	281
§ 53. Замкнутая рама	287
§ 54. Однопролетная рама	291
§ 55. Двухпролетная и трехпролетная рамы	296
Литература	305

САМУИЛ ДАВИДОВИЧ ЛЕЙТЕС
УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТАЛЬНЫХ СТЕРЖНЕЙ

* * *

Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре
Москва, Третьяковский проезд, д. 1

* * *

Редактор издательства *М. П. Ростовцева*
Технический редактор *Л. А. Медведев*

Сдано в набор 12/V-1954 г. Поп. к печати 9/X-1954г. Т-06100. Бумага 60×92¹/₁₆—
Бум. л. 9,2. печ. л. 19³/₄ (18,53 уч.-изд. л.). Изд. №VIII-9664. Цена 9 руб. 25 коп. Переплет 1 р.
Тираж 4 000 экз. Зак. 868.

Типография № 1 Государственного издательства литературы по строительству
и архитектуре, г. Владимир.

О П Е Ч А Т К И

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть	По вине
78	13 снизу	$y(M) -$	$\bar{y}(M) -$	Типографии
189	11 снизу	В точке $= 0$	В точке $\lambda = 0$	"
160	1 сверху	$_1$ и y_{02}	ных прогиба y_1 и y_{02} .	"
181	7 снизу	$\sigma_\Phi < [\quad]$.	$\sigma_\Phi < [\sigma]$.	"
226	1 снизу	$M_k = P \frac{l-a}{l} \quad x(x < a);$	$M_k = P \frac{l-a}{l} \quad x \quad (x < a);$	"
242	1 снизу	$\dots - \frac{EJ}{l} \dots = - \frac{EJ}{l} \dots$	$\dots - \frac{EJ}{l} \dots = - \frac{EJ}{l} \dots$	"

Типография № 1
Государственного Издательства литературы
по строительству и архитектуре
г. Владимир, Б.-Ременники, дом № 18 б

КОНТРОЛЕР № 5

При обнаружении дефекта просим
возвратить книгу с этим ярлыком

Цена 10 руб. 25 коп.

